
数学思维就是5种智慧
理性的3大思维
化繁为简
JOKER
泰勒斯
牛顿
从复杂中求简单
从紊乱中求秩序
爱智慧，学数学

科学是教育和修养最好的工具，学科学的人有求真理的能力，而且有爱真理的诚心。无论遇见甚么事，都能平心静气去分析研究，从复杂中求简单，从紊乱中求秩序；了然于宇宙生物心理种种的关系，才能够真知道生活的乐趣。

——丁文江

目录

前言

你不需要反复刷题，你只需要一次搞定

在数学学习上有三大谬论：

- 死记硬背的谬论：不懂的概念你要记下来，要背诵，一个字都不能错
- 反复刷题的谬论：什么题型都要见过，要刷熟练，这样考试遇到了才会做
- 坚持吃苦的谬论：学习就是苦的，你要坚持吃苦，才能有好成绩

为什么说它是谬论呢？

因为这正好是「菜鸟的三大特征」。

菜鸟的学习就是：死记硬背、反复刷题、坚持吃苦。

然而顶级高手，根本就不是这种风格。

相比反复刷题，他们更擅长一次搞定，开场秒杀：

- 学一遍就秒杀课本
- 解一遍就秒杀难题
- 不刷题就秒杀对手

轻松、愉悦、精准、通透、高效。

那么如何成为这样的顶级高手呢？

你不需要有所谓的天赋。

但你要有一流的思维水平。

数学思维不仅是数学思维

很多家长、同学意识到了数学思维的重要性。

上了思维班。

但往往还是缺乏思维进步。

为什么呢？

因为他们往往还是在数学范围之内去看待数学思维。

然而真相是，其实数学思维并非单纯的数学思维，而是决定理科水平的 5 种智慧，在数学上的投射应用。

你只有站在更高的理性心智全局，才能真正把握数学思维。

决定理科水平的 5 种智慧

这 5 种智慧是：

1）原则智慧

掌控选择与行动的最高原则。

2）表达智慧

精确、简洁、有力表达现象。

3）观察智慧

主动、敏锐、全面挖掘线索。

4）谋略智慧

精准、高效、优雅实现简化。

5）哲思智慧

深入、辩证、系统探寻本质。

我们在数学学习上的努力，要围绕这 5 种智慧的修炼。也只有更高的智慧，才能应对更复杂、更高层的问题。

5 种智慧、5 种花色

这 5 种智慧，对应着思维扑克牌的 5 种花色。

- 王炸：原则智慧
- 红桃♥：表达智慧
- 方块♦：观察智慧
- 黑桃♠：谋略智慧
- 梅花♣：哲思智慧

这 54 张牌，构成了顶尖学神的「核武库」。它囊括了从「看清问题」到「洞察本质」的核心思维体系。

过去，这些思想只在少数天才的脑中流转自如。而今天，我将它系统化、可视化，变成了你也可以拥有的武器。

你，想成为手握王炸、看透牌局的顶尖玩家吗？

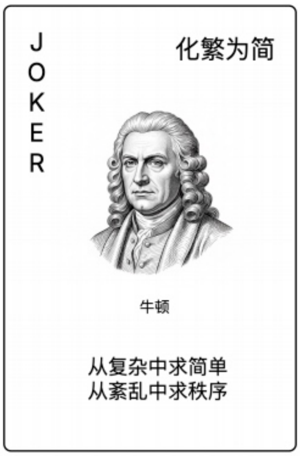
第一章：王炸（原则智慧）

原则智慧第二条：化繁为简

高手有王炸。

理科的大小王，是理科的两条最高游戏规则。

其中的小王，也就是宪法第二条，是「化繁为简」。



科学家丁文江说：

> 科学是教育和修养最好的工具，学科学的人有求真理的能力，而且有爱真理的诚心。无论遇见甚么事，都能平心静气去分析研究，从复杂中求简单，从紊乱中求秩序；了然于宇宙生物心理种种的关系，才能够真知道生活的乐趣。

「从复杂中求简单，从紊乱中求秩序」，这是指导我们理科学习研究实践的核心原则。

理科顶尖的玩家，这一条都是内化到思维当中，形成本能。

小王牌的守护神，是牛顿。

他是「从复杂中求简单，从紊乱中求秩序」的顶级玩家。

当时他研究天文，想要找到天体运作规律。一个难题是望远镜质量不过关。这个质量既有工艺的因素，也有理论的因素。

牛顿自己研究了光学理论，提出了反射式望远镜的构想，发明了第一架反射式望远镜，从而大幅度改进了观察天体的质量。

新望远镜的研发过程，本身就是一个难题。牛顿在经过多次研制非球面的透镜都不成功后，才决定用球面反射镜作为望远镜主镜。

牛顿为了更好的研究，自己动手造观测工具。而为了造出高水平的工具，又要搞定光学的原理以及相关的各种问题。

而后面，为了分析物理运作规律又发明了微积分。

总之遇到困难就深入研究逢山开路遇水搭桥，一路破除重重迷雾，你以为他只是发现了牛顿三定律啊？他是为了吃火锅自己还发明了锅和电磁炉。

而他所做的一切，其实都是围绕「从复杂中求简单，从紊乱中求秩序」。

那么你呢？

你在遵循宪法第二条吗？

还是在「持续违宪」？

为什么学了奥数还是思维不行

在应试教育中，老师教育大家「要什么题型都见过、要做熟练，这样将来考试才会做」。

所以这种方法，自然就要大量刷题。你必须见过了，熟练了，才行。

但是顶级的高手，往往不刷题型。

直接用思维去解决难题，哪怕没见过，也没关系。

一次搞定。

这样自然就省事了。

有年暑假我回老家，跟亲戚一块吃饭。

我外甥在读小学五年级，周末还要上奥数班。

去饭店的车上，我问他奥数班都在教什么呀，他说教了鸡兔同笼。

我问那么到底老师怎么教的呢。

老师教了他们，这种题目要用假设法。先假设都是鸡或者兔子，看有多少腿。然后再比较差异。

那么为什么要用假设法呢？

小朋友说：「这个老师就没教了」。

作为一个从小热爱学习但反感应试教育的人，我人生最喜欢吐槽的就是愚蠢的教育体系。

学生菜菜一个，老师菜菜一班。

应试老师就会灌输知识和套路。

例如这个奥数班，老师教了大家「假设法」这个知识点，要大家记住可以用它来解决鸡兔同笼类问题，知识套路灌输到位。

接下来嘛，那就是给题目让同学们刷了，形成条件反射。这样将来「看到鸡兔同笼类问题」就知道用「假设法」。

这就是「把题型套路刷熟练，从而能够解题」。

然而高手，可以直接运用「化繁为简」思维搞定，无需先看解法、无需刷题。

在小王的指导下攻克难题

例如我们看到题目：

> 鸡兔同笼，共 38 个头，112 只脚，那么鸡有多少只？兔有多少只？

用「从复杂中求简单」的思路：

> 这题目我们没见过没做过，怎么思考呢？
>
> 好像做不出来呀，太复杂了。
>
> 我们能不能【简化】呢？从题目中【简化】出我们能做的，然后看看如何逼近到最终的问题？
>
> 那么，这道题的【复杂性】在哪里呢？
>
> 因为又有鸡又有兔子，很难计算，无从下手。
>
> 要是【简化】的话，就应该是只有一种动物，这样简单很多。
>
> 那么我们假设笼子里只有鸡，一共 38 个头的话，就应该有 38 只鸡。
>
> 每只鸡两只脚，那就是 76 只脚。
>
> 然而题目里一共是 112 只脚。差了 36 只。
>
> 这个差异怎么来的呢？有些兔子被我们假设成鸡了。
>
> 那么到底有多少兔子呢？
>
> 这个比较复杂，难以想清楚，我们就一步一步来嘛。
>
> 目前我们假设所有都是鸡，没有兔子。
>
> 那么我们走出一小步，如果有一只兔子呢？
>
> 这时候应该是 37 x 2 + 1 x 4 = 78 只脚。
>
> 或者，因为少了一个兔子多了一只鸡，而兔子比鸡要多了两只脚，所以应该是 76 + 2 = 78 只。
>
> 如果有两只兔子呢？那就应该是 78 + 2 = 80 只。
>
> 这样我们也就能找到规律了。
>
> 每用一个兔子换掉一只鸡，就会多出两个脚。
>
> 而目前我们差异是 36 只脚，36 / 2 = 18。
>
> 应该有 18 只兔子，而鸡是 38 - 18 = 20 只。
>
> 验算一下： 2 x 20 + 4 x 18 = 40 + 72 = 112 只。

正确。

基于简化思维，我们自己从头把鸡兔同笼化简，通过研究思考，得出了答案，还自己研究产生了「假设法」这个知识点。

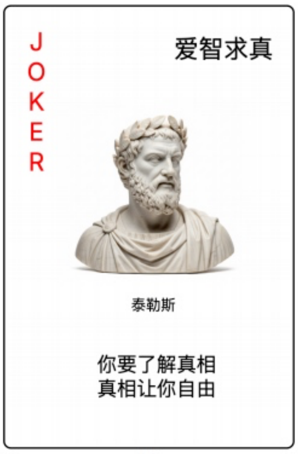
基础智力训练了，新知识获得了，题目会做了，还不用反复刷。

完美！

原则智慧第一条：爱智求真

第二条「化繁为简」是实践论，而第一条「爱智求真」则是价值观。

价值观指导实践论。



在我们的扑克中，「爱智求真」的守护神，是泰勒斯。

为什么牛顿在小王牌上，他在大王牌上？

难道他比牛顿还牛？

某个意义上，的确是。

因为泰勒斯是首创理科的人。他是祖师爷，奠定了理科的核心规则。

而牛顿，可以说是再创理科的人。

打个不恰当的比方。

泰勒斯是刘邦，开创了汉朝。

牛顿是刘秀，再造了汉朝。

所以我们理科学习，应该拜这两位祖师爷。

那么为什么要爱智求真呢？

为了成为自由的人。

这个观念，是古希腊哲学家提出来的。

泰勒斯，就是第一位希腊哲学家，开天辟地之人。

希腊哲学是现代理科，包括数学、物理等的源头。

那么到底什么是哲学呢？它和今天的数学物理有怎样的关系呢？

成为自由的人需要有理性和智慧

希腊哲学家认为，学习和思考的目的，旨在成为自由的人。

那什么是自由的人呢？

古代的希腊，沿海一带，发展出了商业社会，海洋文明。跟其他地区，有很多海上贸易来往。

要展开贸易，就需要有契约。而契约有效的前提，是立约人是独立自主的，有权立约。也愿意承担相关的责任，并能力承担责任。

这样的人，也就是「自由人」。他有权力决定自己的行动，要为自己的行为负责，也有相关的能力来承担责任。

> 自由是权力、责任与能力的平衡。而不是「想干什么就干什么」。

就像开车上路，首先要学驾驶，获得驾照（确保有能力开车，能承担对自己和他人的安全责任），要强制买保险（确保出事了能承担责任）。有了这些，才有开车上路的权力。脱离责任、能力谈权力，往往是灾难。

在希腊罗马社会中，跟「自由人」对应的，是「奴隶」的概念。

罗马人对「奴隶」的解释是「无法自主掌控自己命运的人」。奴隶没有对国家的权力（例如无法投票选举官员），也没有对国家的责任（无需纳税）。

反之，公民（自由人）对国家有权力，同样对国家有责任，例如交税、服兵役。凯撒鼓舞他的士兵说：「诸君是罗马公民」。意思是，你们对国家是有责任的。

从这个角度，传统学校教育中，很多学生在学习上都是奴隶，因为缺乏权力和能力，不能承担全局的责任，无法自主掌控学习，只能被动的依赖外部资源。

> 你希望自己或者孩子，成为学习上的奴隶，还是可以自主学习的自由人？

意志自由与理性自由

人如何能得到自由呢？

这里就出现了两个概念：意志自由与理性自由。

所谓意志自由，就是按照自己的想法行事，想干什么就干什么。

然而这种自由，有一个问题，就是表面上看上去的「想干什么就干什么」，背后常常却是不自主的。

例如十年前，上海满大街都是 LV 的包包。女人为什么都要买 LV 包包呢？很多人是因为觉得自己不买就没面子等。

那么，到底她们买包，是「自由选择」，还是不自由的呢？

回到本文的「韭菜」话题，股市里各种韭菜，他们进入股市、买进卖出，都是自己的操作，他们是「自由」的吗？有多少人是受到市场情绪、虚假信息、低级判断的操控？

> 希腊哲学家认为，要想自由，就需要把握真相、看透事物背后的规律，从而能够做出高质量的判断。

这种自由叫做「理性自由」。

真相让你自由。

在《庄子・养生主》中，有庖丁解牛的故事。说庖丁杀牛十九年，一把刀依然锋利，像新的一样。为什么呢？庖丁说「以无厚入有间，恢恢乎其于游刃必有余地矣」，也就是把握了牛的结构脉络规律，于是「游刃有余」。

从这个意义上，学神是掌握了学习的真相从而获得了学习自由（游刃有余）的人，股神是掌握了股市的真相从而获得了投资自由（游刃有余）的人。

希腊人推崇「理性自由」。他们认为，要了解真相，就需要有智慧。爱自由追求自由，就需要爱智慧追求智慧。

爱智慧，学数学

希腊哲学是现代科学和人文思想的重要源头。而哲学的英文 philosophia，由两个部分组成：philo 的意思是爱，sophia 的意思是智慧，哲学的本义，是爱智慧、追求智慧、追求真理。

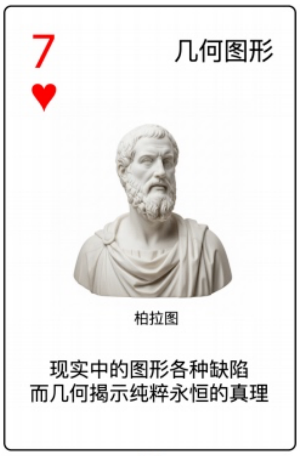
注意在希腊人的观念中，他们认为「智慧」是神的能力，所以一个人只能追求智慧，而不能最终达到智慧的境界。「爱智者」，是追求智慧的人。

而我们中国人的观念中，更习惯讲「智者」，智者是拥有智慧的人。当然这也是源于对智慧的追求。

那么如何追求智慧、提升智慧呢？

希腊人把数学当作基本的教育手段。

这当中一个重要的人物，是柏拉图。



柏拉图在他四十多岁的时候，回到雅典，创建了自己的学校：柏拉图学园。这是西方文明最早的有完整组织的高等学府之一，也是中世纪西方大学的前身。

为了追求智慧，柏拉图在学园中关注 4 个科目：算术（arithmetic）、几何、音乐、天文。

注意，在这里 arithmetic 的翻译，也是算术。当时译者采用了我们已经存在的「算术」词汇。

这里面就形成了一个容易混淆的地方。

古希腊人说的 arithmetic，其实更偏向于今天的数论。研究数的性质、关系，例如质数和合数，而非单纯的计算。它是一门更看重研究、逻辑推理的学科，而非关注计算技能的学科。

在柏拉图以及很多希腊精英眼里，计算这种技能，更多的是小贩之类手工业者、以及奴隶要掌握的。精英需要思考。

而「算术」这个词，如前所述，在中文的含义中，偏向于计算技术/技能。

这两者，差别很大。

柏拉图是怎么看待这四门科目的呢？

援引 WikiPedia 上的内容：

> 音乐教育比其它教育重要的多，它可以陶冶心灵，使性情得到调和，其原因是节奏和乐调有强烈的力量浸入心灵的最深处。算术不仅能训练人的计数能力，而且还能提高人的抽象思维能力和判断能力。
>
> 学习几何是因为军事上安寨扎营、测量作战阵地和编队布阵需要初步的几何学知识。学习天文能设想和把握人的肉眼不能追逐的天体运作，从整个宇宙中发现和谐的美和完善。所以，他认为算术、几何和天文的真正价值在于唤起人对宇宙奥秘的思考，发展和完善人的思考能力。于是，柏拉图将算术、几何、天文和音乐理论四门课程列入教学科目，并在教学活动中广泛传授。

这四门科目，柏拉图称为「liberal arts」，自由之艺。

柏拉图的「自由之艺」，开创了西方大学的思想基础。

直到今天，美国有很多文理学院（Liberal Arts College），是美国高等教育的重要种类之一。

摘录百度百科的解释：

> 这种文理学院，通常以本科教育为主，规模小而精。在教育思维上，注重全面综合教育，强调发掘学生的思维潜能，实现真正意义上的全人发展， 其课程设置以基础学科为主，涵盖艺术、人文、自然科学、社会科学等门类， 以此来区别于以职业培训或科学研究为导向的综合性大学及各种专业学校、技术高校。

理念上听起来很好，然而这种文理学院，整体也是落后于整个时代了。

而「liberal arts」这个词，在中文被翻译为「博雅教育」。对这个翻译，我的感觉很复杂。一方面觉得非常的优雅，某种程度上也非常切题。

但另一方面，「博雅」这个翻译，似乎跟「自由」又有很大的差异，容易让不理解本源的人造成误解。就跟算术的翻译一样。

大体而言，博雅是形式，而自由是实质。

各位如果在考虑留学，一定要警惕网上的各种宣传，比如「博雅教育理念」啊吧啦吧啦。如果听上去觉得对某些学校产生了非常高大上的感觉，当心。很多留学中介是吹牛不打草稿的。

在柏拉图学园的门口，写着「不学几何者，不得入内」。

这不是让你去考试刷分的，是让你去追求智慧。

柏拉图第一次确立了几何作为学校四门主科的地位，所以在我们的理科思维扑克中，他担当了红桃 7（几何图形）的守护神。

在学几何之前，你可以拜一下柏校长。

自然哲学与人的哲学

严格的说，其实他们当时并没有「数学」这个概念，他们在研究哲学。

哲学又可以概略分为两类：

- 自然哲学
- 人的哲学

自然哲学，重点就是研究自然原理，数学、物理、化学、生物等等，都在这个范畴之类。

数理化的清晰分科，是近代科学革命后的事情。在古代，这些都在「自然哲学」里。

也就是说，「自然哲学」其实就是古代的理科。

一直到牛顿发现三大定律，他的著作名称，都叫做「自然哲学的数学原理」。牛顿可以说是最后一位自然哲学家，因为他之后，就开启了分科的时代。

理科理科，探索事物原理的学科。

而理性心智，以爱智求真、溯本求源驱动，本身就是理科的思想基础。反过来我们通过理科学习，不仅仅是是探索了解世界的真相，也是发展我们的理性心智。

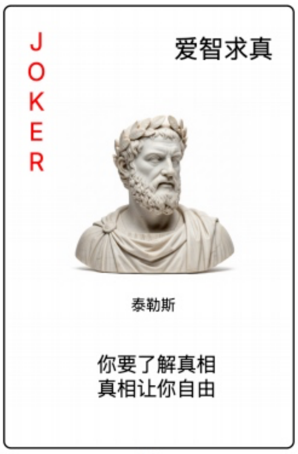
理科自身的立足点就是「求真理求真相」，老师却告诉大家死记硬背知识点，只要会刷题能得分就可以。

这不光是方向反了。

这是离经叛道背叛师门了。

理科祖师爷泰勒斯

希腊历史上的第一位哲学家，也是第一位自然哲学家，是泰勒斯。



泰勒斯生平大致在公元前 620 年到公元前 545 年。

在那个时代，大多数人都以神话或者传统教条理解自然现象（迷信），其实到今天很多人依然高度迷信。

泰勒斯是希腊历史记载的第一个用观察和逻辑解释自然现象的人。

我们前面谈到，自然哲学其实是古代的理科，泰勒斯是开创理科的祖师爷，是那个身体力行设定原则智慧的人。

人类的先知。

泰勒斯认为我们经验观察产生的结论未必可靠。

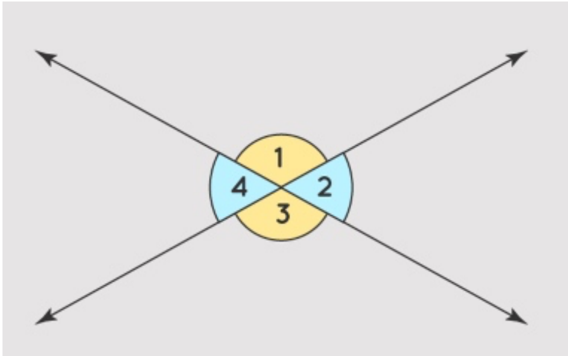
如果要寻求真相，那就需要严谨求证。

他是第一位提出观念需要证明的思想家。

那么如何求证呢？他首创了「数学证明」的思想和方法，成为第一个做出数学证明的人，开创了数学证明的传统。

这个思想，到今天还是超前大多数人。

泰勒斯的一个案例，是对「对顶角相等」的证明。



1）观察：两线相交，对顶角看起来相等

2）质疑：是否总是相等？为什么相等？

3）证明

已知相邻角互补（=180°）
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$
$\angle 1 + \angle 4 = 180°$
所以 $\angle 2 = \angle 4$

这个相对简单，但是要注意是这个范式，我们观察产生的经验结论，要经过证明确认其真实性。

这个思想，对于认知水平至关重要。

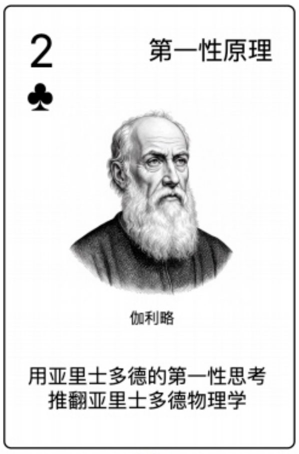
基于质疑精神，我们可以继续对这个证明提出质疑。

证明中引用了「已知相邻角互补」作为前提，那么为什么「相邻角互补」呢？请证明之。

这样一层一层下去，难道没有尽头吗？

是否会追溯到最基本的无需证明的观点/事实呢？

这就引出了第一性原理（梅花 2）。



学渣用经验解释经验，学神形成严谨抽象概念

泰勒斯有一个观念，就是要从直观经验中提炼规律。

很多时候，这种提炼就会形成抽象概念。

例如，他观察月亮、盘子、车轮等事物，这种人们称为「圆」。

从月亮、盘子、轮子这种事物，我们提炼出「圆」这个抽象概念，其实就是在总结规律。

这个是比较好总结的。

那么什么是圆呢？你能给他下一个定义吗？

大多数人（无论是古人还是今人）往往会说：「像月亮、盘子、轮子这样的东西，就是圆」。

这还是用现象来解释概念，而非找到这些事物的本质特征。

甚至还有人会说：「像月亮、盘子、轮子这样的圆圆东西，就是圆」。

让你来定义什么是「圆」，圆都还没定义，你就用「圆圆」这个没有定义过的来定义圆自己，矛盾了。

大多数人其实连这种矛盾都看不出来。

反过来，认知水平高的人，对概念就敏感，善于提炼、识别、分析。

泰勒斯当时给圆下的定义是：

和某一点距离相等的点组成的轨迹，就是圆

大家注意了，这就脱离了举例法的定义，而是描述了圆的抽象本质规律了。

这样描述的圆，就是理论上的纯粹的抽象，超越了现实例子的不完美，例如车轮很难真正做到这么圆。

这个定义从经验世界出发，定义的圆，脱离了经验世界的具体对象，完成了抽象过程，提炼了本质规律（到定点的距离等于定长）。

今天初中数学中圆的定义，就是基于泰勒斯提出的范式。

基于这个定义，进一步细化，「某一点」我们称为「圆心」，「距离」我们称为「半径」，这样新的概念就出来的。

高中基于集合论，把它做了一个变化，定义类似于：

到定点的距离等于定长的点的集合。

但发现本质规律、实现抽象定义的，还是泰勒斯。

理科学神普遍的特征，就是像泰勒斯这样，日常会观察研究分析思考，尝试去从现象中提取规律形成概念。

他们往往会自己去定义概念。

哪怕是书上的概念，他们也会自己去思考概念怎么来的，完成研究推导分析提炼的过程。

然而大多数同学，就是死记硬背，把书上的概念抄几遍背下来。

老师就是这么教的。

这背后的问题，是老师普遍也理性心智欠缺，大多数老师以前也是靠死记硬背刷题考大学的，而不是靠研究分析理解形成底层智慧。

低认知水平培养低认知水平。

认知水平低下的人，本能的觉得概念不重要。然而高认知的人，对基础概念无比重视。

学渣关注 How，学神关注 Why

了解事物有三个基本维度，我称之为 WWH 模型:

- Why：为什么
- What：是什么
- How：怎么做/怎么用

对于 WWH 核心关注点的差异，反应了学习者的层次：

- 学神（最关心的是 Why）
- 学霸（会关注到 What）
- 学渣（只关注 How）

大多数同学包括老师，最关注的就是 How，怎么解题。

这种水平都很渣。

低层次的家长、老师和同学，往往 how 搞不定，去咨询什么的，又抱着一种观念「不要跟我讲什么原理、概念，告诉我怎么做」。

这种想法非常愚昧。

理科之所以叫做理科，意思就是「探索原理的学科」，原理是 Why 和 What。

你只管 How 学什么理科啊。

顶尖的同学，往往是深度探索底层原理 Why 的，进而把概念的 What 搞清楚，而原理搞懂了，概念扎实，解题的 How 其实简单很多。

用泰勒斯研究提炼圆的概念的例子。

我们看到车轮、盘子、月亮的相似性，可能会提炼出一个概念例如圆，就完了。

这个比较容易，因为看上去就像。

但是泰勒斯会研究思考，到底为什么（Why）它们看上去很像呢？它们的共性是什么呢（What）。

研究分析发现，原来它们共同的规律是，它们的那一圈边缘，到某个点的长度相等。

把为什么搞清楚了，圆的定义也就呼之欲出了。未来可以运用这个知识点。

Why -> What -> How。

通过搞清楚来源去提炼产生概念知识。

哪怕我们学习，课本上已有的知识，要学透，也要经过这个逻辑，重新分析推导。

大多数同学并不是这样的，他们直接背定义。

顶尖学神会怎么学习呢？

课本上看到了定义（What），也会反过来研究思考为什么（Why）会产生这个概念。

很多时候课本上是有相关内容的，只是大多数同学忽略了。哪怕没有，顶尖学生也会自己思考尝试建立推导逻辑。

例如你先看到了圆的定义，反过来思考这个推导出来的。

我们看月亮、看盘子，能看出来到定点的距离等于定长的规律吗？

好像直接看比较困难。

看车轮呢？

我靠，车轮好像比较容易，因为很多车轮是有辐条的，辐条都连接到一个中心上。

而这些辐条好像都有一个规律，长度差不多啊。

你从这个角度思考，理科祖师爷泰勒斯，可能是从车轮来发现这个规律的吧，相对简单。

当然这只能是猜想了。

提升难度，如何从月亮、盘子这种东西，来发现识别这个规律呢？

车轮辐条跟他们相比，貌似加了一系列辅助线，从而让规律更容易浮现出来。

那么到底如何加辅助线，这个逻辑是什么？

让我们观察月亮、盘子这种东西，至少有一种特征比较明确，那就是貌似它们有对称性。

对称性是「观察智慧♦」中非常重要的一张牌，方块 K。

让我们想象折叠，会产生对称轴。

这样的对称轴有多少根呢？好像会很多。

那这些对称轴之间有什么关系呢？

我们尝试再折叠一次，或者画对称轴。发现它们会有一个交点。

再来，好像还是会相交在一点。

这一个点非常特殊了。

很有意思。

它特殊在那里呢？

比较容易发现，它和边缘上的点貌似距离相等。

这也出来结论了。

于是这样，我们利用「对称性」、「折叠」，自己干出辅助线来发现了规律。

重新走完了研究定义「圆的概念」路程，自己提炼创造了这个概念。

就是费曼所说：

> 凡我不能创造的，我就没有理解。

你把基础概念重新创造了，就理解了。

这才是学神的学习方式。

无需记忆，只需理解。

为了理解，研究创造。

菜鸟回答别人出的题，高手提出自己的问题

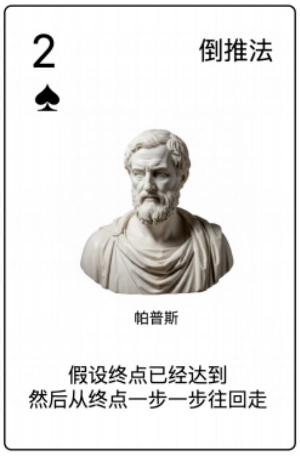
另外需要注意一点，大多数同学，是做老师出的题目。

而前面，我们研究圆的概念时，其实是反过来，从这个定义结论出发，反向出题：

如何从盘子、车轮、月亮这些日常现象中，提炼出圆的定义？

通过这个反向的问题，从 What 去寻找 Why，从而实现真正深刻的理解。

这其实运用了基于逆向思维的倒推法（黑桃 2）：



而且通过这个自创问题，我们还研究出两种解法。

一种从车轮入手，简单（因为自带辐条甚至辐心的辅助线）。

一种从更抽象的只有边缘没有辅助线的月亮、盘子等研究思考，利用「对称性」等入手探索。

这道题目自己研究思考下来，那对思维的训练很不错了。

第二种情况还是有难度的。

你这样走一遍，不仅仅是深入创造理解了概念，还做了一题多解，有了对对称性、辅助线利用的新思路。

头脑就是这样灵活起来的，逻辑就是这样强大起来的。

解题经验丰富了，概念透彻了。

完全是在研究课本阶段就能变得很厉害。

这里就有一个结论：

> 吃透课本知识的 What-Why-How，不用额外的习题，就已经可以成为一流水平。

当然你还是要刷一些题巩固提升，但整体水平直接在吃透课本层面搞定了。

这时候就非常省事。

知识扎实、解题经验丰富，大多数题目一看就知道怎么回事跟哪些知识有关系。少数难以解决的，也可以研究分析。

我在中学时代就发现一件事情，就是绝大多数题目，我看一眼就知道考察什么知识点，直接干出来就完了。核心在于研究理解搞清楚了基础概念。

我的同学就不行，他们需要用那种「题型资料」，靠题型反过来刷熟练度，看到题型要形成条件反射，才知道哪种情况用什么知识点。

但是题型教辅里面又是一啪啦新的内容和知识啊，题型本身也是知识。

我只需要学课本，他们还要学题型教辅刷题，我根本就没有后面这块工作量。

这里面有个荒谬之处，就是我的学习能力更强，但我只需要学好课本；他们学习能力不足，课本学不好，但课堂内容还得学，同时还有增加要「熟悉各种题型能应用自如」的任务，工作量还比我大很多。

他们更没这个能力呀，又回到能力圈的问题了。

你连课本基本概念知识都没搞清楚，还去搞题型，这些题型五花八门，你有那个精力和本事吗。

关键是还不止数学一科，其他的还要花费时间呢。

为了解决一个问题，制造出更大的问题。

但他们认为是对「基础知识不牢」的解决方案。

这又是认知水平不同导致的差异。

砍掉学习任务量，一个核心就是砍掉你去套题型的任务量。不管千变万化，回归基础概念和思维，用吃透课本解决 95%的问题。

归根到底，你先要对「基础概念知识体系」有深刻的认知，这才是应对千变万化题目的基础。

以不变应万变。

简单愉悦省事。

一切法律与宪法抵触者，无效

在法律体系中，宪法处于最高地位。

一切法律与宪法抵触者，无效。

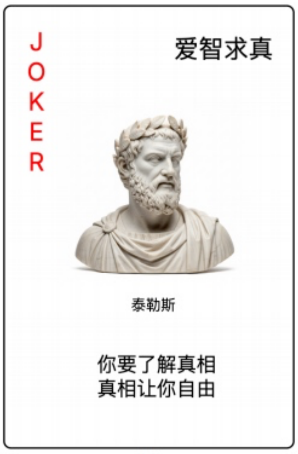
我们看「法律」这个词的英文，和「规律」本来也就是一个词，LAW。

在理科学习中，同样的道理。

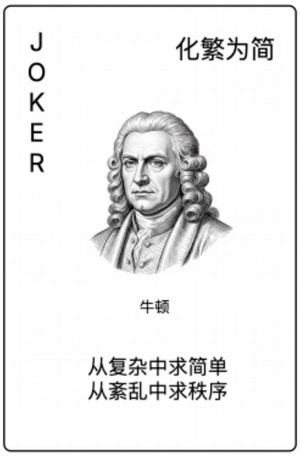
学习行为和「原则智慧」违背者，无效。

回归我们的两条宪法：

1）大王：爱智求真



2）小王：化繁为简



以泰勒斯和牛顿为代表的理科大佬，正是发现、制定和有效执行宪法的人。

今天同学们看上去努力，然而行为普遍违宪。

大家关心的成绩和分数，而不是修炼智慧探索真相。

大家普遍把简单问题搞复杂，很少去思考复杂性在哪里，如何有效简化。

你可能很努力。

然而你是个理科法盲。

天天违宪而不自知。

所以被惩罚、被这些大佬发现发明的知识虐得死去活来，也就不足为奇了。

反之，真正理解了原则智慧的同学，往往是爱得死去活来，觉得学习和解题充满了乐趣。

4 种花色、4 大能力

虽然宪法有最高地位，但是没有其它法律来落实，那也是空的。

在理科思维扑克中的 4 种花色，就是用来落实宪法的。

它们代表了 4 种智慧、4 种能力：

- 红桃♥ (表达智慧): 表达能力
- 方块♦ (观察智慧): 观察能力
- 黑桃♠ (谋略智慧): 谋略能力
- 梅花♣ (哲思智慧): 哲思能力

每个花色 13 张牌，总计 52 张，就构成了捍卫宪法的核武库。

真理，需要由武器来捍卫。

第二章：红桃（表达智慧）

红桃：表达智慧与表达能力

在理科思维扑克中，红桃花色代表表达智慧，对应着表达能力。

如果说语文看重表达能力，大家会本能赞同；然而数学看重表达能力，可能觉得一头雾水，觉得这东西最多算是个很次要的辅助技能。

然而真相恰恰相反。

归根到底，理科的研究流程，是「从现象到真相」的过程。

那么首先就涉及到，如何描述表达现象。

很多时候，我们之所以「看不清真相」，首先就是因为「现象的不清楚」。

有一年春节亲戚聚会，我外甥当时上小学二年级，他背着书包来到了餐厅，拿出了作业本。一问就是在学奥数，他妈（我表妹）给他报了奥数班，还有作业没完成。

有道题他不会，于是我表妹给他讲了一遍。讲的内容是应该怎么解（第一步干嘛第二步干嘛）。

然后外甥还是一脸懵逼。

他妈的语气开始不耐烦、更不耐烦，脸拉长，要爆了……

重复讲了两遍之后，她问：「你懂了没有」。

小朋友摇摇头，看见妈的脸色更凶了，又点点头。

她终于爆了，开始找老公：「你过来，来教一下你儿，气死我了，这么简单讲了几遍他都不会」。

我看了一下题目，大概是这样的：

> 小明家的鱼塘里养了草鱼、鲤鱼、鲢鱼和黑鱼，已知草鱼和鲤鱼一样多，黑鱼比草鱼少 2 条，鲢鱼比黑鱼多 1 条，鲤鱼有 5 条，问鱼塘里一共有多少条鱼？

我一看就觉得这题目根本不该在二年级引入。太复杂条件要素太多，二年级小朋友难以理解。

要我就根本不会让小朋友做这道题甚至上这个所谓的奥数班。

话分两头，亲妈败阵后亲爹上场。他很和蔼的又把解题过程讲了一遍。

> 我们先算草鱼，草鱼=5。
>
> 再把黑鱼求出来，5-2=3。
>
> 再求鲢鱼，3+1=4。

最后把它们加起来：5 + 5 + 3 + 4= 17。

很简单啥

懂了吗？

小朋友继续做懵逼状。

她妈在旁边大声说：「我就是这样跟他讲的。要这么讲还需要你吗？平时学习你也不管，你聪明你上啥。」

很尴尬。

这时候小朋友外公听到了，拍马过来上场缓和局势了。说：「我来看看」。

他又给小朋友讲了一遍。

最后开饭了这题还是没搞定。

我靠我要不行了，笑死了。

一道题，从儿子、爸爸、妈妈到外公，一家四口上阵，为啥还是没能搞定呢？

爸爸、妈妈和外公三人上场，他们的动作都是一样的：讲一遍解题过程。

灌输方法。

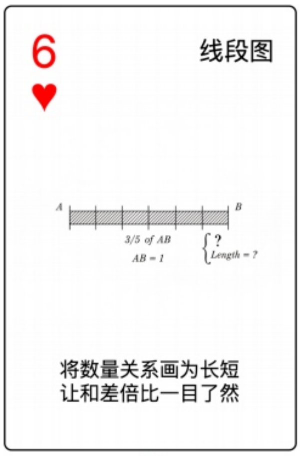
但是小朋友是不懂方法吗？

不是，根本没到那一步，他连现象都没搞清楚。

对二年级小朋友而言，这鱼那鱼啥的，太复杂了，晕了。

如果有一个「清晰的表达」，那就容易看清楚。

打出我们的红桃 6，画线段图来表达这些鱼的数量。



从「鲤鱼有 5 条」开始（因为只有这个是已知的）。

一下子就懂了。

这就是「清晰表达的力量」。

其实我们在现实工作中也是，例如同样去拜访一个客户，有些人写个拜访日志，能够把拜访过程、客户需求等写得很清晰，一看就明白，领导也马上明白需要给什么资源支持；有些人写出来混乱不堪，看到就头大简直像受刑。

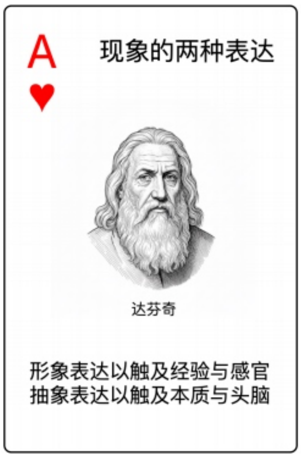
这也是表达能力。

当然，如果是家长辅导小朋友画图，那是家长厉害。

而如果自己掌握了「清晰表达的武器」，那就是你自己厉害了。

红桃 A：现象的两种表达

红桃 A 是提领整个红桃的核心牌：「现象的两种表达」。



整体来说，我们对现象的表达分为两类：

- 形象化表达
- 抽象化表达

形象化表达，旨在更贴近现实经验、人的感官和感觉。例如有画面感（针对视觉）、生动性（让人有体验感）。

而抽象化表达，旨在抽离表面元素，更贴近纯粹的底层逻辑、结构、原理，更贴近人的理性头脑。

这两者往往是相辅相成的，例如线段图，一方面是在形象化建立视觉体验，一方面其实也是在抽象提炼题目中的元素关系。

出色的表达能力，意味着需要对这两种表达有敏锐的觉察和丰富的手段。

红桃 A 的守护神，是达芬奇。

他是把形象表达和抽象表达融为一体，科技和人文合二为一的经典案例。

哪怕是画画这种形象化手段，背后依然是抽象化的逻辑。例如透视怎么弄，结构是什么如何表达。

就像参加素描班，看上去一个苹果很简单，画起来根本就不那么回事。

顺便说从绘画的角度，「写实」和「写意」两派，也就是「贴近形象表达」还是「贴近抽象表达」。

成为顶尖高手，要两手抓。

红桃中其它的牌，就是中小学数学中最常用、关键的表达方法，旨在「清晰的表达现象」。

13 张牌如下：

- **A**: 现象的两种表达
- **K**: 函数
- **Q**: 方程与不等式
- **J**: 符号表示
- **10**: 集合
- **9**: 十进制表示法
- **8**: 坐标系
- **7**: 几何图形
- **6**: 线段图
- **5**: 数轴
- **4**: 表格
- **3**: 结构图
- **2**: 示意图

这些牌的排序，大致是除了 A，按照抽象表达到形象表达。

- K-9：抽象表达
- 8-2：形象表达

注意我前面谈到了，形象表达和抽象表达往往可能是融合的，所以可能一些牌既形象又抽象，这里只是按照主要特征大致分类。

从小学到高中的数学表达脉络

红桃中的大部份「表达方法」牌，是从小学到高中至关重要的核心知识。

而且它们之间，是有密切关系的。

同学们数学学习吃力，跟不了解这些「表达类知识」和它们背后的思维逻辑，有很大关系。

上次有位家长说，她女儿高二了，对于函数一直是稀里糊涂，虽然努力但是概念都不清楚。

这些不搞清楚，你数学就废了，刷题再多也没用。

首先它们是数学知识体系中的关键内容，所以你的数学体系会崩塌建不起高楼。

然后它们是解题至关重要的武器，所以你解题水平也会弱鸡（当然知识体系不行也是导致弱的重要原因）。

所以要搞清楚 3 个问题：

1）对为什么会有这些表达方法？

2）如何使用这些武器？

3）它们之间有什么关系？

符号表示：抽象表达的基石

在抽象表达牌中，最基础的一张是黑桃 J（符号表示）。

黑桃 J 的守护神，是莱布尼茨。

为什么选择莱布尼茨作为「符号表示」的代言人呢？

因为他深刻的意识到了符号的重要性，在符号领域做出了深度研究，并且对整个世界产生了重大影响。

在代数符号方面，我们知道莱布尼茨和牛顿都发明了微积分，但是对于后世影响更大的，是莱布尼茨的微积分系统。一个重要原因就是，他的微积分的符号表示更清晰，牛顿的模糊很多。

这种影响力的差异，体现在哪里呢？我们来看一个简单的例子：求一个函数 $y = x^2$ 的导数（也就是变化率）。

牛顿的符号：他会在变量上方打一个点来表示其变化率。所以，他会写成 $\dot{y} = 2x$。

莱布尼茨的符号：他用 dy/dx 来表示 y 相对于 x 的变化率。所以，他会写成 $dy/dx = 2x$。

一开始，你可能会觉得牛顿的写法更简洁。但它的问题是「信息量太少」。那个「点」只告诉你「y 在变化」，却没有告诉你「y 是相对于谁在变化」。

而莱布尼茨的 dy/dx 符号，则是一个天才的设计。它不仅告诉你「y 在变化」，还明确地指出了「y 是相对于 x 在变化」。这个「d」就像一个操作指令，你可以对任何变量进

行这个操作。更神奇的是，dy/dx 看起来就像一个分数，它在很多运算中，真的可以像分数一样进行「约分」和「拆分」（比如链式法则），这极大地简化了复杂运算的思考过程。

简单来说，牛顿的符号是一个「静态的标签」，而莱布尼茨的符号是一个「动态的、充满信息的操作符」。 正是这种清晰度和延展性上的巨大优势，让莱布尼茨的符号系统最终赢得了世界。

而在数字符号方面，他研究了二进制，而二进制后来成为计算机内部使用的数字系统。如果说农业时代运行在十进制之上，那么信息时代和 AI 时代运行在二进制之上。

顺便说一下，莱布尼茨对二进制的思考，源于易经的启迪。

易经是人类历史上辩证思维的先驱，传说是周文王所作。

辩证思维这张牌，是梅花 Q。

数学思维背后是哲学思维。

理科的精进，需要的不是天天刷茴香豆的 4 种写法，而是融会贯通人类文明的精华。

莱布尼茨清晰的认识到，创造和选择正确的符号，可以启迪我们更深刻的思考，发现真相。

我们学习理科，也要对此有清晰的觉察。

要有符号思维。

回过头看算术和代数领域，从「符号思想」出发，分别有两个最重要的符号表示：

1）算术领域：十进制表示法（数字符号）

2）代数领域：用字母表示数和量（字母符号）

从小学到高中，我们的数学都是建立在这两种表示法之上。

数字的符号表示：简化的需求

我们最早学习数学，是从认识 0-9 开始的。

0-9 就是数字符号。

而且这种符号，是更加抽象的符号。

在它之前，往往还有相对比较形象的符号。

例如画几个点就表示几，或者画几根线就表示几。

但是这样不方便，如果你的数字越大，你画点画线的时间就越长。

越来越复杂。

基于简化原则，用抽象符号，例如 0-9，这个你表示没有和表示九，画的笔画也差不到哪里去。

但光是符号化还不行，还是会面临复杂性问题。

这就引出了十进制。

为什么十进制总是教不会学不会

在理科思维扑克中，十进制是红桃 9。

我们在小学入门阶段，十进制表示法是超级难点。

整体来说理解 0-9 比较容易，因为有手指头这个我们自带的形象化工具对应。但是 10，等等，为什么 10 根指头成了这个样子了？

小朋友们会普遍懵逼，例如「11」，为什么两个 1 意义不一样？

那个乱啊。

事实上，家长和老师也会想办法帮助小朋友理解，还形象联系实际，但娃还是糊涂。

这里关键问题在于，按照课本和上面的教法，十进位这个知识点，看上去就像是从天上掉来的。没有为什么，就得学会。它不是一个自然生长长出来的知识点。

而十进制理解不透彻，后续各种知识都会有问题，例如加减法尤其是涉及到进位情况。

很多时候你看小朋友算加减法，一会对一会错。通常要么就是十进制没搞懂，要么就是后来的四则运算不明白。

刷很多题也没用，不明白就是不明白。

可以说小学前三年数学，踩的很多坑，都跟不理解十进位有直接关系。

数字符号表示的卡点：一一对应创造符号太复杂

让我们思考啊，从零到九，我们用了十个数字表示（0-9）。

那么接下来呢？难道每增大一个数目，我们就要为它创造一个新的符号？这样下去什么时候才是头啊？

甚至你可以引导小朋友尝试走一下这个路线，看看大家能创造多少个符号出来。

但显然，这种方式是不可持续的。越到后来符号越多也就越复杂。

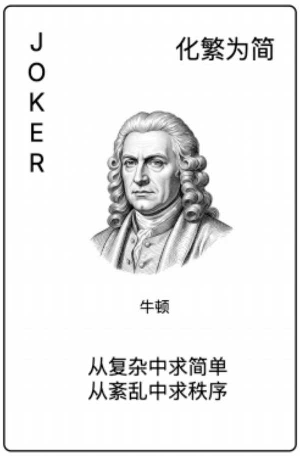
你记符号都记不过来。

换句话说：「为每一个数字创造一个符号」的方式因为复杂性，不可持续。我们需要找到一个更加简洁高效的数字表达机制。

简化思维：如何用 0-9 表示所有的数字

现在，打出我们的小王牌，在牛顿亲切的关注下思考：

> 如何才能化复杂为简单呢？



已知：我们已经创造理解了 0-9 这十个符号，而且借助于手指这个自带形象化工具，理解十以内的数相对比较容易。

那么，思考一下：

> 我们能否用 0-9 这十个符号，来表达所有的数字。这样就实现了数字表达的简化，无需为每个数字创造一个符号。

顺着这个思路，如果我们要表示所有的数字。0-9 可以直接表示，十根手指头如何表示呢？

简化思维：逢十化一

0 表示没有，所以不能用 0。接下来，就应该是 1，我们能否尝试把十又变成 1 呢？

这就产生了「十进制」这个知识点。

同时，「逢十进一」这个动作，我们称之为「进位」。

这个 1 和以前的 1 肯定不一样。

但这样说太抽象了，又形成了复杂性难以理解。简化思维继续出场，如何能够简化我们的认知和理解呢？那就需要形象化。

从形象化的角度，类似于我们把 10 根棍子捆在一起，会形成一个更大的 1。或者用手指的角度，类似于把两个手掌合拢在一起（10 根手指），同时又是一个整体。

继续类推，如果有了 10 个 10 根在一起的棍子，又可以绑在一起形成更大的 1。

这样对一堆棍子，总能变成 1-9 的数量（基于不同的单位）。

这样就从形象化的角度，解决了用 0-9 表示所有的数的问题（当然，一年级我们范围在自然数内）。

递归思维的应用

前面这种「逢十化一」，如果再次逢十继续化一的思路，我们称为「递归」。

在理科思维扑克中，递归性是方块 10。

递归就像是俄罗斯套娃。一层套一层，你会发现同样的模式。

「没有什么问题是一包辣条不能解决的。如果有，那就再来一包」，这就是递归。

递归思维是一种重要的简化思路。它是「用一个方法来重复解决问题」。

简化思维：「位」的概念的诞生

但是问题没完，我们最后还要用数字表示。有些「1」显然单位更大，有些「1」单位更小，如何用数字来表示呢？

这就是「为了解决一个问题可能会产生新的问题」。

那么从直观的角度，可能有不同的方案。例如，我们可以把表示单位的，和表示数量的对应起来，做成表格。用形象化的符号表示单位是棍，还是捆，甚至捆的捆。

○	•
2	1

如果没有顺序的话，可能比较混乱。为了简化，我们规定，单位最小的在最右边（也就是 1 根的），接下来是 10 根一捆的……我们就很有秩序了。

就像班级排座位一样，最瘦的最右边，大家都有了自己的位置。这是数的位置，那就引出了「位」的概念知识点，进而有了对常见位的称呼「个位」、「十位」、「百位」。

十位	个位
○	•
2	1

这种表示很完整，但占的地方大啊。

因为位是按照顺序固定的，所以我们熟悉之后，就可以去掉对位的形象化表示，和文字表示了，直接用数字「21」啦。这样进一步简化之后，就得到了我们日常的十进制表示法。

有序思维的应用

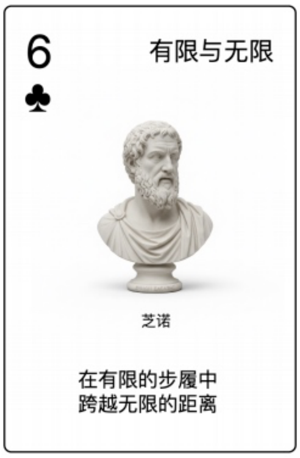
上面这种排序，其实就是一种「有序思维」的应用了。

主动的给数字建立秩序。

有序性在我们的扑克里，是方块 J。

有限与无限：如何以有限破无穷

在哲学思想中，「有限与无限」是一个重要的话题。



在数学和现实中，也有很多重要的应用场景。

例如我们数的表示法，就是一个「有限破无穷」的问题。

如何用有限的数字符号，表示无穷的数？

在算术中，这才是真正的困难而重要的问题。

看上去是不懂 38+25 之类怎么计算，其实那只是表象。

真正的问题是，对十进制表示法，以及它更底层逻辑的缺乏认知。

刷题的必然失败：以有限的经验，应对无限的题型

大家应该都听过一句话：

吾生也有涯，而知也无涯

可能你认为这是鼓励你求知。

其实庄子后面还有一句：

以有涯随无涯，殆已

用有限的生命去追求无限的知识，你就完蛋了。

这也是一个「有限与无限」的辩证问题。

那怎么办呢？

我们难道不求知了吗？

你还是要求知，但是要超越狭隘的「应试题型」，去掌握底层逻辑，从而「以不变应万变」。

顶级高手之所以是高手，并不是因为他们「更熟练的刷题型」，而是高手根本不刷题型。

用思维能力破解难题

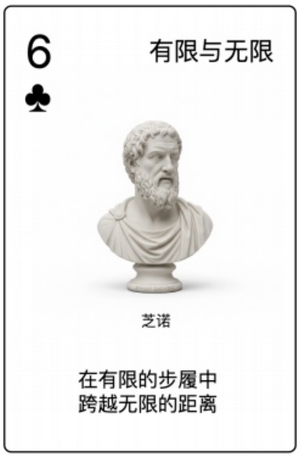
我们看前面十进制表示法的案例分析。

我们的红桃九是怎么来的呢？

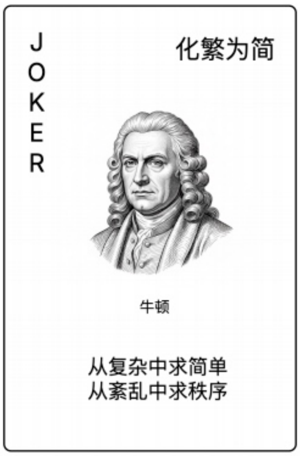
为了解决「以有限符号表示无穷的数目」而发明产生。

而为了发明这个表达方法，涉及到几张不同花色的思维牌：

1）梅花 6:有限与无限



2）小王：化繁为简



3）方块 10：递归性

创造递归性（逢十化一）。

4）方块 J：有序性

创造有序性（按照单位大小排序）

多张思维牌的组合，产生了十进制表示法这个伟大发明。

而它一旦发明，就成为了后续算术的基石。

这就是思维能力的力量。

然而在应试教育中，大家对这种力量一无所知。

所以费力不讨好。

学知识的思路：它是为了简化什么问题？

大多数同学学知识，就是记忆背诵做题。

但是要真正高效理解，并且化为自己的能力，你需要提问：

> 它是为了简化什么问题？这个问题的复杂性在哪里？

十进制是为了简化数的表示（后续还简化了数的计算）。

对数是为了简化乘法的计算，把乘法变成加法。

函数是为了简化我们对变化的事物或者关系的理解。

这样不光学会了知识，而且学到了解决问题的思路。

这就是「从少量的数据，挖掘出大量的信号」。

就像前面从十进制当中，我们就挖掘出了丰富的内涵。

你用这种学法，不看教辅，不用加班加点，不应试，已经可以吊打大多数同学了。

能管理更高的复杂性，意味着少走大量弯路

如果我们理解了十进制是为了解决更大的复杂性问题「如何用有限的符号表示无限的数」，不仅仅是理解了十进制概念本身，还意味着：

- 十进制加减法的复杂性大幅度降低，因为它们的复杂性很大程度源于十进制本身

- 巧算的理解难度和精通程度大幅度降低，因为小学巧算看上去各种模式，本质就是基于十进制的凑整
- 小数的复杂度大幅度降低，因为小数其实是十进制的分数

这样就无需大量刷题了，很快各种攻破。

还有一点，在数学课本的教学逻辑中，教学是一步一步的，例如 20 以内的数的表示和加减法、100 以内的数的表示和加减法…..

在每个阶段都会刷大量的题目。

但如果你上手破解的复杂性就是「用有限的符号表示无限的数字」、「用通用的方法实现所有数的加减」，那么上来就已经了解了通用的数的表示法和加减法，无需按部就班学习什么「20 以内的数」、「100 以内的数的加减」之内。

因为「20 以内的数」也好，「200 以内的数」也好，都是「表示无限的数」的一种情况而已。

先掌握了通用的管理无限的数的复杂性的方法，那剩下的就简单了。

这就是为什么数学学习，非常强调「以通性求通解」。

也就意味着跳过了绝大多数的学习任务和刷题量。

而今天同学们每次都死记硬背新的知识点、刷题，效率极低，还掌握不好。

其实小学数学前三年的算术知识体系，用这种「攻克核心复杂性」的学习研究方式，一个月也就可以整体掌握了。剩下少量刷题来提升计算精准度也差不多了。

至于小学四到六年级的算术知识体系，再加一个月也够了。

然而学校的做法，就是让大家死记硬背，跳过了对真正复杂性的研究分析，脱离了数学教育的本质，没苦创造苦头让大家吃。

高手学习省力高效，靠的是降维打击

我们看学校里顶尖的同学，往往他们看上去没那么努力，有一种轻松通透感，刷题不多但是成绩稳定一流。

这种就是因为能够管理更高层次的复杂性，有更通用的底层能力之后，直接形成降维打击。

就像你在盘上公路上弯弯扭扭开来开去，人家直接上直升飞机。

他们的精力在哪里呢？

探索空气运动的规律、研发直升飞机。

你走再多的坑吃再多的苦，比不上去点更高的科技树。

在军事论坛讨论中，有一个常见话题是「两种战机格斗能力怎么样」。

然而在新时代的思想是「谁跟你斗狗？」，远程发射远距导弹干掉你就好了，缠斗不说明你厉害，说明你傻。

在 5 月的印巴空战，就是基于这种思想的经典案例。

当时数量上处于劣势的巴基斯坦空军，利用中国产的远程空对空导弹，和信息情报，在自身还处于印度飞机的打击范围之外时，发射导弹，导弹飞行 150-200 公里后击中印军战机，打了个 6:0。印度空军连对手面都没见到，被打得蒙头转向收兵。

这就是降维打击。

各位以前反复应试刷题那是不知道，如果今天之后你还反复刷题，要想想「狗斗是证明我厉害呢，还是说明我傻逼？」

想清楚。

代数表示的基本演化

前面我们讨论了红桃 J（符号表示）。

指出基于符号表示，在中小学算术代数中产生了最重要的两种表示：

1）算术领域：十进制表示法（数字符号）

2）代数领域：用字母表示数量（字母符号）

前面我们讨论了十进制表示法背后的思维，接下来让我们来看看代数表示法的思维和演进。

整体来说，中小学阶段代数表示法的演化是：

- 字母表示数量：最基本的符号表示（获得简洁表达通用性质的基本能力）
- 方程和不等式：表达洞察静态的数量关系
- 函数：表达洞察动态的变化关系

首先关于字母表示数本身，这个概念是容易理解的。

真正的意义，却被大家所忽视。

请注意我们解决问题，要「从复杂中求简单」，那么对应某种复杂性，一个恰当的表示，能够让我们简洁精确的看到现象、研究分析问题。

相比用具体的数字，使用字母表示数的核心意义在于，它解锁了「描述通用情况、发现通用规律」的能力。

例如，对于加法运算规律的研究，这种「研究规律」类的问题，本身就是通用性的。

你用 23+25、73+285 这种具体数字举例，从层次上是不匹配的，因为这些都是具体数字。

但是用 a + b 就很好了，这种抽象性对应着我们本身研究规律层次的通用性。

如果不用字母表示数，表达加法交换律可能要用一啪啦话，难懂。

但是 a + b = b + a 简单清晰。

这又是表达的力量。

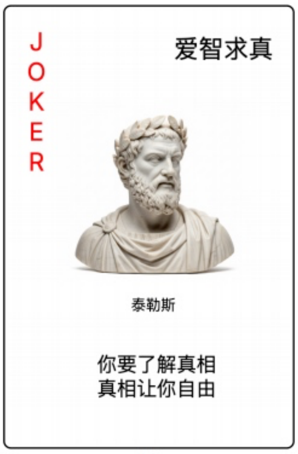
那么这里问题就出来了， 这种力量，其实是当你研究规律的时候，才会发现它们的核心价值。

但是大多数同学在应试教育中，关注的普遍是「应用知识」，而不是「寻求规律」。

课本上那些知识，都是背下来的；刷的题目，通常都是求解具体问题，而非探索通用规律。

这样导致思维上跟不上，总是用「套用知识解题」思路。

回到前面的理科宪法第一条：爱智求真。



探索规律，是爱智求真的实践。

如果你本身思维是刷题求分，这种宏观思想就和数学以及整个理科观念不匹配，违宪。

于是各种不适应，看不懂。

这个看不懂不是个别知识层面了，是整体思路层面了。

例如初中上来，在有理数、多项式部分。

有理数当中会重新推导加法法则等，多项式中也是在代数情况下来应用四则运算法则产生规律性结论。

大多数同学并没有觉察到，为什么要这样干。

无非就是要考试。

这个天然就很难学好。

这就像恋爱里讲「化学反应」（chemstry）。

应试逻辑，和求真逻辑，是没法产生火花的。

就像很多人每天朝夕相处，产生不了理解，也产生不了爱情。

理解和爱情要有共鸣。

我们本身课本知识的逻辑，就是在研究规律中产生知识。

所以基于字母表示法，在有理数这个范围之内，我们开始推导研究规律。

首先基于已经知道的验证过的正数的四则运算规律，探索推导到有理数范围之内。

但这些还是针对两个数的一次加减乘除。

进一步推导探索更复杂的情况呢？

如果是多个数的四则运算呢（这时候数都用字母表示了）。

那不就是单项式和多项式，以及他们的规律了么？

还有，我们发现有多个乘法乘数相等的情况，想要简化一下表达，那就产生了乘方的概念。

这个思路对于有「研究规律、寻找通性」的理科思维的人来说，简直就是自然而言的，甚至不回去像。

本能就知道为什么要干这件事情，所以就自然的快速融入去把握思路了。

大多数人这时候都想着做题。

那你就完蛋了。

因为理科本来就是「掌握底层的规律，进而用规律解决各种问题」。

真正最难、最有价值的是第一步。

大家反而跳了。

在其实没多少技术含量的第二步雕花。

你解 1000 道 382+235 这种问题，都比不上发明十进制这一道题。

因为后者才是「解决通用问题」，前者只是后者重复一千遍。

而且解决十进制的发明问题，中间涉及到高阶思维的巧妙应用，这些才拉动思维能力。

这种「宪法共鸣」，是你和理科匹配的关键。

让我们来计算一下，为了十进制的计算，假设每个小朋友每天刷 25 道题，一年 200 天，就是 5000 道。两年算 10000 道。大多数时候是懵逼状态在刷。

至于吗？

搞懂十进制，刷 1000 道练手差不多了。

方程的伟大：实现了纯粹的「现象表示」

字母表示的另外一个产物，是方程。

我们的红桃 Q。

方程的出现，实现了一个简化，就是让我们可以直接根据现象去表示现象。

这句话听上去是废话。

然而不是。

很多问题用算术方法，之所以困难，是因为你要产生一系列步骤，最后推出求解问题的结论。

例如鸡兔同笼。

但方程就不一样。他把解题分为两个步骤：

1）列方程

2）解方程

列方程，你不用管什么是条件，什么是问题了，大不了就设未知数。

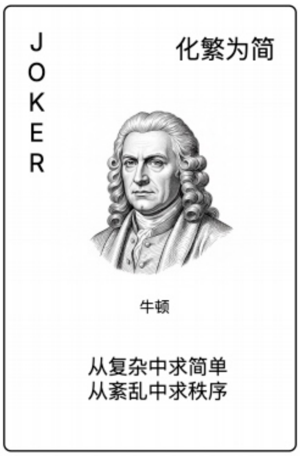
用你所能理解的、简单的现象的逻辑列出方程。

然后用通用的方法求解。

这是我说的「根据现象去表示现象」。

一个伟大的发明。

因为简化了很多问题的求解难度，实现了「化繁为简」。



所以理科学习啊，不是说你知道了这个知识就行了，而是你了解了它怎么出来的，有什么厉害的地方，产生了什么价值。

因为这些，一方面才有理解、欣赏和热爱，一方面自己的知识和解题水平会截然不同。

函数的价值：表达与洞察变化关系

方程重点在于静态关系的表达。

而在现实中，有很多时候，是要关注连续变化的关系。

就像前面谈到的导弹发射，对方飞机一直在运动变化，这时候怎么表达时间和位置的关系？如何精准的预测判断？

这就是函数的用武之地了。

它给了我们对持续变化的关系的表达和洞察能力。

而函数又是物理的基本工具。

甚至「表达洞察变化关系」这个核心需求，很大就是从物理来的。

在理科思维扑克里，函数是红桃 K，守护神是欧拉。

欧拉并不是第一个创造函数的人，但是他对函数做出了重要贡献，y=f(x)这个简洁的表达式，就是源于欧拉。

而在高中数学中，因为集合论的引入，函数的定义、运用等也跟着发生了变化。

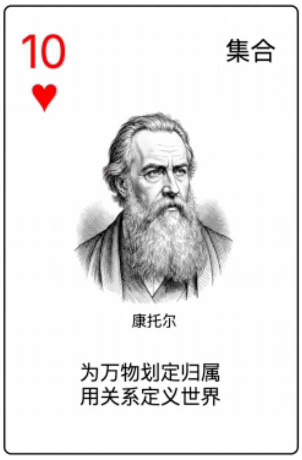
初中数学，其大背景围绕「物理」展开，关注实用性。

而高中数学，其大背景是追求自身的进一步严谨，更关注逻辑性。

「集合」，就是这当中的一个关键。

集合的引入：数学的严谨性

高中数学和初中数学相比，一个核心变化，就是引入了集合，作为其它表示的基础。



这样就产生了各种衍生概念例如「解集」、「点集」、「集合运算」，在此基础上，很多初中的概念都被重新定义了一遍。

集合论产生的大背景，是在 18 世纪 19 世纪，数学家们觉得此前的数学不够严密，各种漏风。

康托尔创造了集合论，在此基础上把数学的严密性升级了。

然而，这样一来抽象性也升级了。

所以我们看高中数学，抽象度相比初中又高了一大截。

很多同学中考 140 多（满分 150），到高中纷纷变成 40 分的零头。这和高中数学的抽象程度升级有很大关系。

如果我们梳理一下符号表示的核心演化脉络：

- 小学算术：十进制数字符号体系
- 初中代数：多项式、方程和函数代数符号体系
- 高中代数：基于集合论的方程、不等式和函数符号体系

这三套符号体系，造成了对大多数同学的理解挑战。

小学十进制，很多人凭借硬刷，花了几年的时间多少看上去过得去。

也是因为知识点少，奢侈让大家可以花几年时间攻克一个核心难点。

多项式、方程和函数符号体系，大多数同学玩不转了，靠刷题撑。

高中集合之后的升级版符号表示体系，彻底懵逼。刷都刷不动，不及格就是不及格。

我在高中的时候，有次数学老师说到集合的引入，是因为解决数学逻辑不严谨问题。

我当时听得觉得很重要。

但是大多数同学，对此毫无反应。

因为我从来就是用推导、分析、探索规律的方式去学习数学的，所以我知道「不严谨」这是什么意思？你首先需要建立在此前严谨推导分析的经验，才能站在这些经验上去体会「不严谨」。

大多数同学已经觉得初中代数、平面几何逻辑太强太抽象无法理解了，他们对「这还不严谨」根本是没有经验基础的。

应试教育不追求严谨，只追求提分。

真正的问题是，你要从头去理解这套符号体系的脉络。

掌握了脉络其实很简单。

自然而然的理解。

回顾：形象表达与抽象表达

回顾我们红桃（表达智慧），13 张牌如下：

- **A**: 现象的两种表达
- **K**: 函数
- **Q**: 方程与不等式
- **J**: 符号表示
- **10**: 集合
- **9**: 十进制表示法
- **8**: 坐标系
- **7**: 几何图形
- **6**: 线段图
- **5**: 数轴
- **4**: 表格
- **3**: 结构图
- **2**: 示意图

这些牌的排序，大致是除了 A，按照抽象表达到形象表达。

- K-9：抽象表达

- 8-2：形象表达

注意我前面谈到了，形象表达和抽象表达往往可能是融合的，所以可能一些牌既形象又抽象，这里只是按照主要特征大致分类。

前面整体我们讨论了抽象表达牌，接下来让我们看看形象表达牌的脉络。

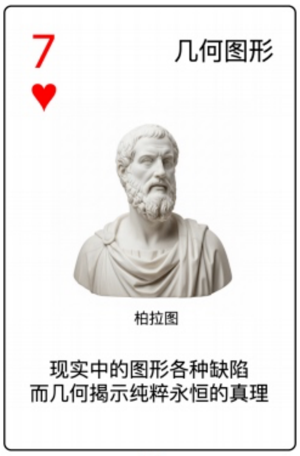
几何图像：形象的抽象

在形象牌中，从数学角度最基础的是「几何图形」。

需要注意的是「几何图形」其实也是对「现实图形」的抽象。

因为我们是把现实图形的本质规律加以提炼，形成了几何图形。

就像前面泰勒斯对圆的定义，现实中很少有「到定点距离等于定长」的完美圆，多少有些出入，我们直接用理论定义了几何的圆。



关于柏拉图，我们都知道有个词叫做「柏拉图之恋」。

柏拉图之恋，并不是指男女之恋，而是指的是对永恒的纯粹的观念、真理的热爱。

他认为，现实世界的肉体是容易腐朽的，经验是短暂的、事物是不完美的。

你很难找到一个真正三条边是完美直线的三角形，然而在观念世界里，三角形完美的是三条直线边，内角和永远是 180 度。

只有在观念世界里，才有永恒、纯粹的真理。

从数学对象的角度，我们人类最早关注的，一个是数量，一个是空间形状。数字符号抽象了数量，几何图形抽象了形状。这两者也够成了数学基础。

一方面几何本身就是研究对象，一方面它很多时候又作为研究其它数学对象的工具。

同时，它所发展出来的一个独特用途，是基于这种直观性，做证明推理演绎几何，训练推理能力。

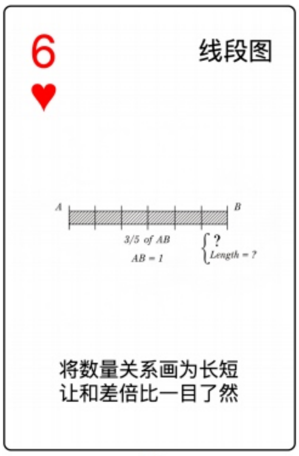
泰勒斯开创了对几何问题做数学证明，毕达哥拉斯学派发扬光大，而到了欧几里得则发展出平面推理几何。

关于欧几里得，在我们的梅花牌中会谈到他的「公理化体系」，这是学好初中推理几何的思想基础。

线段图：数量关系的直观表达

点和线算是最简单的图形元素，两点一线组成的线段，在数学中有了一个用途：对数量关系进行直观表达。

在小学阶段的解应用题中，线段图是头号武器。



在本章开头的家庭辅导案例中，关于这个题目：

小明家的鱼塘里养了草鱼、鲤鱼、鲢鱼和黑鱼，已知草鱼和鲤鱼一样多，黑鱼比草鱼少 2 条，鲢鱼比黑鱼多 1 条，鲤鱼有 5 条，问鱼塘里一共有多少条鱼？

我已经阐述了对小朋友难以理解题目的问题，有效破解，就是用线段图表达。

线段图看上去很简单，为什么家长们就想不到呢？

很多时候还是因为你不理解，为什么要用线段图，它解决什么问题。

今天有些学校，老师可能在小朋友开始接触应用题的时候，强制要求画线段图。一方面并不告诉大家为什么。

所以造成了一种奇观：有些时候没有必要学生在强行画线段图，有些时候线段图正好能解决问题，大家反而想不到。

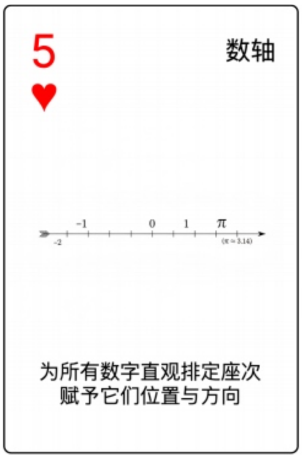
线段图的广泛应用，是「数形结合」思维的体现。

它也是小学阶段最重要的数形结合工具。

而到了中学，数轴的重要性陡然提升。

数轴：从两点一线到无数点一线

线段是两点一线，数轴则是一条线上无数点（有一个特殊的点原点）。



数轴和线段图不同。

线段图在数学中是一个辅助工具，我们常常用来解算术应用题时，用它表达数量关系。

然而不用，你能解出来，也可以。

但在中学数学中，数轴却是在代数基础知识体系的必需部分。

例如，在人教版初中教材中，我们对有理数大小的定义，就是直接从数轴来的（根据在数轴上的位置关系）。

数轴不是代数的外挂，而是代数的本体知识。

很多题目，要实现巧妙解决，往往都是利用数轴来做数形结合，例如求绝对值 、解不等式等等，数不胜数。

如果你是用理解推导的方式去学习思考，知道数轴的意义和在知识体系中的位置，这类数形结合转化往往是自然而言发生的。

但如果考刷题，少数同学刷多了能刷出经验，大多数同学刷多了其实还是没有敏感度。

但很多题，你有敏感度一眼就看出来（也就是后面方块会谈的线索能力），没有敏感度半天还搞不定。

这里谈到本体和外挂，其实如果你是基于理科宪法思想（爱智求真、化繁为简），往往学一遍就成了你的内生知识，自然懂了。

如果死记硬背灌输知识，想考刷题，哪怕刷熟练了也就是外挂，和你头脑自然的知识反应完全不是在一个层次。

所以顶尖同学往往是看见一道题本能就知道是什么知识点怎么解，马甲变了也无所谓；刷题的同学要靠手熟、过一段时间就要重新熟练刷熟，还不能变化太大要跟刷的题型长的差不多。长在自己知识体系中，和需要时候开外挂，是两回事。

两条数轴组合会发生什么呢？坐标系的登场

数轴非常重要，让我们来尝试围绕它做点文章探索。

我们用直线进行组合，会产生几何图形，例如三角形、长方形。

那么如果用数轴进行组合，会产生什么呢？

两个数轴围绕同一个原点，坐标系就产生了。

注意这两个数轴之间未必一定是直角，当然直角坐标系通常更简单、直观，成为了主流。

我们熟知的是笛卡尔发明了坐标系，其实费马也发明了坐标系，而且并不是限定直角的。

费马本职工作是一位律师，业余爱好研究数学。他律师干得默默无闻，然而其业余爱好，却风生水起。

他在一本丢番图的《算术》页边空白处，写下了一个猜想：「当整数 $n > 2$ 时，关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解」。

然后说「我确实为此发现了一个美妙的证明，但这里的空白太小，写不下」，挖了个坑。

一直没有填上。

好奇心害死猫，数学家一直想他是怎么证明的。

过了 350 年，终于证明出来了。

这就是费马大定理。

回到坐标系。

数轴上的一个点，和一个有理数（实数）对应；那么两个数轴，每个数轴取一个点，最终就有了数对，同时在平面上指向一个点。

这样我们就有了一系列的武器和发现：

1）把平面上的点，和数对对应起来，这个数对也就是点的坐标

2）对于函数 $y = f(x)$，如果数对一个点表示 x，一个点表示 y（也就是一条坐标轴表示 x，一条表示 y），那么我们就有了函数的图像，可以形象的看到函数的变化/映射趋势，函数的「形」的部分找到了，数形合体。

3）解方程和不等式，往往可以转化为和数轴或者其他线交点相关的问题，新的数形结合。

4）解析几何产生了，我们有了一种新的通用的方式，用代数来解决几何问题。很多以前难以搞定的几何推理问题，变成了代数搞定，不仅仅是非常强大的工具，诞生了一个新的学科领域。

5）一条数轴表示的正负数，最多只有两个方向（正/负）。而两条数轴组成的平面上的数，有很多方向。拓展对这种多方向的支持，向量产生了。进一步产生了向量的运算。这又成了超级强大的工具。

6）在古希腊时代那些哲学家，就开始研究圆锥曲线。解析几何之后，大家发现这些曲线其实就是一些函数的图像，这样代数和几何、古代和近代又产生了奇妙的联系。

初中到高中很多知识和题目，就是在这些领域上变化花样。

把握了脉络，其实很多事情就简单。

三条到多条数轴会发生什么呢？高维空间与人工智能

那么，如果再增加一条与 x 轴、y 轴都垂直的数轴（z 轴），会发生什么呢？

我们就从二维的「平面」，进入了三维的「空间」。一个点的位置，不再由(x, y)这两个数决定，而是由(x, y, z)这三个数组成的「数组」来精确定位。这，就是我们在物理课上描述物体运动、在电脑游戏中构建虚拟世界所依赖的三维直角坐标系。

到这里，我们的想象力似乎已经到了极限，因为我们生活在一个三维空间里。

但数学家和科学家的思想，从未被我们的肉眼所束缚。他们问了一个更疯狂的问题：如果，组成这个「数组」的数字，不是 3 个，而是几百个、甚至几千个呢？

这就诞生了「高维空间」的概念。它在物理上无法被看见，但在数学上，它真实存在。而这个看似天马行空的思想，在今天的人工智能（AI）领域，爆发出了惊人的力量。

比如，AI 如何「理解」我们人类的语言？它使用一种叫做「词向量 (Word Embedding)」的技术。简单来说，它会为每一个词，比如「国王」、「女王」、「男人」、「女人」，都生成一个由几百个数字组成的「高维坐标」。

在这个由 AI 构建的、我们看不见的「语言空间」里，奇迹发生了：

语义的远近，变成了空间的距离。 比如，「国王」这个点，和「女王」这个点的空间距离，会非常近；而和「香蕉」这个点的距离，就会非常远。

语义的关系，变成了空间的方向。 甚至可以发现，从「国王」这个点，走向「女王」这个点的「方向和距离」，与从「男人」走向「女人」的「方向和距离」，几乎是完全一样的！我们甚至能通过向量运算，得出 「国王」 - 「男人」 + 「女人」 ≈ 「女王」 这样令人震惊的结果。

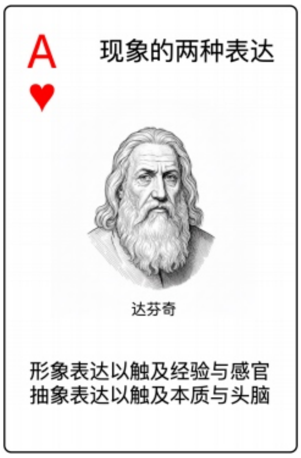
从简单的直线和点出发，通过不断的组合与升维，我们最终抵达了人工智能的核心腹地。这，就是数学表达的力量。它不仅在描述我们已知的世界，更在构建我们未知的未来。

总结：表达智慧与表达能力

回顾我们红桃（表达智慧），13 张牌如下：

- **A**: 现象的两种表达
- **K**: 函数
- **Q**: 方程与不等式
- **J**: 符号表示
- **10**: 集合
- **9**: 十进制表示法
- **8**: 坐标系
- **7**: 几何图形
- **6**: 线段图
- **5**: 数轴
- **4**: 表格
- **3**: 结构图
- **2**: 示意图

红桃 A 是整个红桃的统领牌，它指出了两种表达：形象与抽象。



这些牌的排序，大致是除了 A，按照抽象表达到形象表达。

- K-9：抽象表达
- 8-2：形象表达

注意我前面谈到了，形象表达和抽象表达往往可能是融合的，所以可能一些牌既形象又抽象，这里只是按照主要特征大致分类。

把握了这些武器的意义和演化逻辑，从小学到高中的核心知识，其实很大程度已经打通了。做题，也就能选择「恰如其当的表示」。

从能力角度，红桃代表了「表达能力」。

跟语文、显示工作和生活一样，能够清晰的、恰当的、精准的表达现象，是非常高价值的、很稀缺的能力。

有效的表达，那么直接破除迷雾搞定，要么为后续的研究奠定基础。

在此基础之上，就要动用「观察智慧」了。

第三章：方块（观察智慧）

方块：观察智慧与观察能力

在理科思维扑克中，方块花色代表观察智慧，对应着观察能力。

很多题目，如果我们现象表达清楚，可能就直接搞定了。这种题是拿分更快的。

但我们也会遇到各种题目，表达清楚现象，还是会有各种迷雾；或者甚至你上来连怎么有效表达都不清楚。

这时候就要进一步寻找线索。

你需要观察。

我们的方块 A，选择了一位虚拟人物作为守护神：福尔摩斯。

理科和侦探的关系是什么呢？

理科本身就是侦探真相的学科。

只是并不是侦破罪案，而是侦破客观真相。

你需要像福尔摩斯一样敏锐、挖掘线索。

在《波希米亚丑闻》里，福尔摩斯对华生说：

> 你只是看见，而我却是观察。这两者之间，有天壤之别。(You see, but you do not observe. The distinction is clear.)

当时，福尔摩斯问华生，从他们公寓的窗户，通往华生诊所的楼梯有多少级。华生说他不知道，尽管他每天都要走上几百遍。而福尔摩斯却清楚地说是十七级。

这就是「看见」与「观察」的差别。「看见」是被动的接收信息，而「观察」是主动地、有目的地去研究和分析。

从观察中寻找线索。

那么到底要寻找什么线索呢？

4 类常见的线索

在数学研究中，有 4 种类型的常见线索：

- 结构性线索
- 等价性线索
- 相似性线索
- 特殊性线索

我们的方块牌，也就围绕这几种线索展开：

一、 结构性线索: 关注事物内在的秩序与自我重复的模式

- K: 对称性
- Q: 周期性
- J: 有序性
- 10: 递归性

二、 等价性线索: 寻找在变换中，那些保持不变的本质

- 9: 不变性
- 8: 等价关系

三、 相似性线索: 在不同事物间，寻找可类比的模式与特征

- 7: 类比
- 6: 模式识别
- 5: 比例、相似与全等

四、 特殊性线索: 通过研究极端或特殊情况，来洞察一般规律

- 4: 极端情况
- 3: 特殊值
- 2: 边界条件

对称性线索：高斯的灵光

我们需要寻找的第一类线索，是结构性线索。

这个观察角度，是事物内在的结构特征、模式。

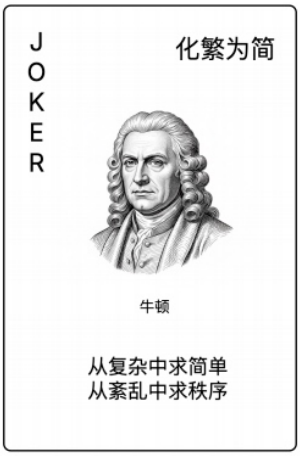
寻找结构性线索最著名的经典案例，源于高斯的那个「对称性发现与简化」。

其他人看到 1+2+3…+50 要一个个算，除非老师告诉他们有简便方法。

高斯看到这个「复杂的问题」，就能简化直接干出来。

猜测高斯的思路，是快速的发现了这个算式的对称性，然后思考怎么利用这个对称性简化。

注意头脑里要有「简化思维」，我们的理科宪法第二条：



基于对称性，头尾相加一样。

那么这个「不同的数的加法」，就可以简化为「同样的数的加法」。而同样数的加法，按照定义就可以简化为乘法。

Bingo。

漂亮的解法就出来了。

其他同学还没算出前几个，他已经报出了结果。

不要去背答案，要去研究「他是怎么想到的」

这个解法人人都会。

因为老师教了。

看到这种题，以后记住，首尾相加。

甚至更贴心的可能连公式都让你记下来：(首项 + 末项) × 项数 ÷ 2

但是为什么你和高斯差距那么远呢？

关键是「他是怎么想到，我为什么想不到，我怎样才能想到」。

很多题目一讲思路你觉得简单，但人家能想到思路才是厉害。

事后诸葛亮人人会做，事前诸葛亮才是真诸葛。

你要去研究人家怎么一步一步想到的。对比自己和高手差异在哪里。

例如这个题目，高斯他「看到」了。

这是偶然「看到」的吗？高斯又不是灵光一次，而是持续牛逼。

持续牛逼不是偶然。

高手会去深入观察。

而我们大多数同学，习惯非常糟糕，拿到题就开干。

在《红发会》这个案子里，一位名叫威尔逊的当铺老板前来求助，讲述了他获得一份古怪高薪工作的离奇经历。福尔摩斯立刻敏锐地意识到，案件的关键，可能在于这位老板新招的伙计。

于是，福尔摩斯与华生亲自前往那家当铺。福尔摩斯假装问路，在那位伙计（斯波尔丁）开门并跪下指路时，他用手杖敲了敲店铺前的地面，并飞快地瞥了一眼伙计的裤子。

回到贝克街后，福尔摩斯向华生揭示了他的重大发现：

> 我需要看的，不是他的脸，而是他裤子的膝盖。

福尔摩斯解释道：

> 我看到，他裤子的膝盖处，不仅磨损得厉害，起了皱，还沾着新鲜的泥土。一个当铺伙计，平时最多是站着或坐着，为什么要长时间跪着工作，以至于磨穿了裤子呢？ 唯一的解释是，他在挖掘一条通往某处的隧道。

华生听完，脱口而出：

> 啊！多么简单啊！

福尔摩斯立刻用一种近乎嘲讽的语气回应道：

> 是啊！我每次向你解释我的方法，你都觉得非常简单。但当你下次看到同样明显的事实时，你还是会像以前一样，什么也推断不出来。

我们很多同学，就是这种华生的毛病，对思维过程不以为然。哪怕题目不出来，看了答案就觉得自己懂了。

那为啥你下次题目又懵逼了呢？

一听就懂、一做就懵，新时代的华生。

这个问题家长也普遍存在，例如家长经常说的一句话就是「课本很简单，关键是不会做题，要给孩子多加量训练」。

搞懂课本知识比做出试卷的大多数题目难多了。

你确认你或者孩子对课本知识和背后的思路真懂了吗？

如果真的觉得简单，为什么「教材防自学」成为了热门话题。

今天大家蛮分裂的，一方面叫「教材防自学」学不懂，一方面叫「课本太简单」要大量刷课外题。

谁给你的勇气，认为课本简单，只要听老师讲讲、感觉听懂了就是懂了。

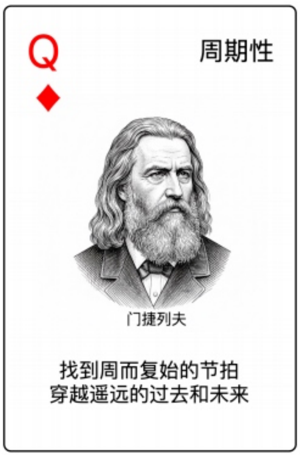
梁静茹吗？

不要做华生，要做福尔摩斯和高斯。

周期性线索：门捷列夫的洞察

在一些场景中，存在周期性。

发掘周期性线索最著名的案例，当推门捷列夫。



在门捷列夫之前，化学家们已经发现了 63 种元素。但这 63 种元素，就像 63 个没有编号的士兵，混乱地站在一起，人们只知道他们的「体重」（原子量），却看不出他们之间有任何内在的秩序。

门捷列夫的天才之处在于，他坚信，在这片混乱之下，必然隐藏着一种神圣的节拍，一种深刻的周期性规律。他将每一种元素的性质，写在一张张卡片上，然后像一个孤独的将军，在书房里夜以继日地排列这些「化学扑克」。

最终，他发现了那个节拍：当元素按照原子量递增的顺序排列时，它们的化学性质，会呈现出惊人的、如同音乐中八度音般的周期性重复。

这，就是「元素周期律」。

但接下来，门捷列夫做出了一个让他封神的、堪称科学史上最勇敢的举动。当他发现，如果严格按照原子量排序，有些元素的性质，会破坏这个完美的「节拍」时（比如碲和碘），他做出了一个惊人的选择：

他选择了相信自己发现的「周期性」，而不是当时被奉为金科玉律的「原子量」。

他勇敢地将一些元素的位置进行了对调，以确保「节拍」的和谐。更令人难以置信的是，他在他的周期表中，大胆地留出了三个空白的格子。

他这样做，不仅仅是留白，更是像一位先知一样，向全世界发出了三个精准的预言。他对这三个当时还不存在于地球上的、未知的元素，做出了详细的性质描述：

- 他预言了「类铝」的存在，描述了它的密度、熔点和化学性质。
- 他预言了「类硼」的存在。
- 他预言了「类硅」的存在。

当这些元素——镓、钪、锗——在随后的 15 年里被陆续发现，且其性质与门捷列夫的预言几乎分毫不差时，整个科学界都为之震动。

门捷列夫揭示了「周期性」观察智慧的威力：它不仅能整理已知，更能预测未知。掌握了周期，你就掌握了穿越迷雾、洞见未来的力量。

有序性线索：从混乱建立秩序

有序性线索是最普遍的结构性线索。

在理科思维扑克中，有序性是方块 J，守护神是冯 • 诺依曼。

冯 • 诺依曼是 20 世纪最伟大的科学家之一，被誉为「计算机之父」和「博弈论之父」。他的大脑，就像一台超高速的计算机，善于在瞬间洞察到任何事物背后的秩序。

有一个流传甚广的故事：二战期间，美军的轰炸机在返航后，机身上布满了弹孔。军事专家们普遍认为，应该在弹孔最密集的地方加强装甲。

这个看似合理的结论，却被冯•诺依曼一眼看穿了其致命的逻辑漏洞。

他指出，我们看到的这些弹孔，只是「幸存者」身上的伤疤。那些真正致命的部位（比如发动机、驾驶舱）一旦中弹，轰炸机根本就无法返航。所以，我们看到的那些没有弹孔的地方，才是最需要加强装甲的要害。

这样产生了一个著名的词「幸存者偏差」。

顶尖的高手，观察不仅仅是限于「出现的现象」，更要去进一步观察「未出现的现象」。

这种「于无声处听惊雷」的顶级观察力，在福尔摩斯的探案故事中，也留下经典一幕。

在《银色马》这个案子里，一匹价值连城的赛马「银色马」在深夜失踪，它的驯马师也惨遭杀害。苏格兰场的警探，将所有的注意力，都集中在了马厩里发现的那些「出现的线索」上：死者的外套、一把奇怪的手术刀等等。

但福尔摩斯，却向马厩管理员，提出了一个所有人都觉得莫名其妙的问题：「那天夜里，马厩里的狗，有没有叫？」

管理员回答说：「没有，先生，狗什么也没做。」

就是这句看似平淡无奇的回答，让福尔摩斯瞬间锁定了真凶。他对华生和警探说：「这，就是关键的线索。那条狗在深夜没有叫，这本身就是一件不寻常的事。」(That was the curious incident.)

福尔摩斯的判断是：马厩里的狗，是认识那个深夜进入马厩的窃贼的。因为它没有叫，这个「未出现的现象」，雄辩地证明了，窃贼不是外人，而是那个它每天都能见到、并且非常熟悉的人——正是那个已经被杀害的驯马师本人。他想把马偷出去做手脚，结果反被惊醒的马踢死了。

今天我们同学虽然努力，但是数理水平难以提升，也是因为被「出现的现象」所迷惑，却没有去观察「未出现的现象」。

大家天天根据考试成绩，来判断自己有什么问题，学习水平如何。

然而数理科目，最重要的理性思维、心智能力，这些在考试中，往往没有直接出现，并不直接考察。

老师的评语，也并不会评价你是否「爱智求真」、是否「有效的表达」、是否发现了结构线索。

这些「应该出现却没有出现的」，才是真相。

大多数考试的题目和评分，在没有整体洞察力观察力的情况下，反而都对你形成了误导，最后连真凶都没抓到。

提升观察能力，关注真正的线索，才能破局。

那么问题来了：

在你们的理科学习中，有什么「应该出现却没有出现的线索」呢？

回到有序性话题。

冯·诺依曼对人类最深远的影响，无疑是他为现代计算机设计的体系架构。在他之前，早期的计算机，就像一个混乱的作坊。

每一次计算，都需要工程师们像接线员一样，手动地插拔大量的电线和开关，程序和数据杂乱无章地纠缠在一起。计算一条弹道，可能需要几天甚至几周的时间来「重新布线」。这是一种极其低效的混乱。

冯·诺依曼的天才之处，在于他为这个混乱的数字世界，「创造」了一套简洁、优美、且影响至今的神圣秩序。这个秩序，就是著名的「冯·诺依曼架构」。

他规定，一台计算机必须由五个部分组成：运算器、控制器、存储器、输入设备和输出设备。

他最伟大的创举，是提出了两个革命性的思想：

「程序存储」：计算机的指令（程序）和它要处理的数据，不应该再混乱地分布于物理线路中，而应该以同等的地位，被统一存储在存储器里。

「二进制」：无论是复杂的程序指令，还是海量的数据，在计算机的底层，都应该被转化为最简单的 0 和 1 来进行表示和运算。

这就是「有序性」思考。冯·诺依曼没有去发明更复杂的开关，而是用一个极其简单的、上帝视角般的顶层设计，为计算机内部的信息流动，规定了一套清晰的交通规则。

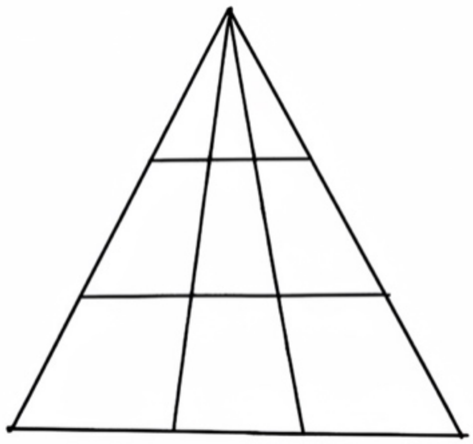
数据从「输入设备」进入 -> 被存放在「存储器」 -> 「控制器」根据程序发出指令 -> 「运算器」执行计算 -> 结果从「输出设备」展示出来

这套由他「创造」出来的秩序，是如此的强大和优美，以至于从 70 多年前的第一台现代计算机，到今天你手中的智能手机、数据中心的超级服务器，其最底层的灵魂，依然是这座由冯·诺依曼建立的「有序大厦」。

他没有去适应混乱，他用秩序，终结了混乱。

在数学研究中，也是不仅要从混乱中发现有序性，更要从混乱中创造有序性。

例如小学常见的数图形问题，数数下图有多少三角形：



拿到这道题，绝大多数同学（包括很多成年人）的反应是什么？

是东一锤子西一锤子开始数数：

这个小的…这个中等的…这个尖尖的…哦，这个刚才好像数过了…这个横跨两层的算了吗？

这种做法就混乱，走路踩香蕉皮，走到哪里算哪里。它的结果必然是：「不重复」靠运气，「不遗漏」靠天意。

但高手会怎么做？

高手从不马上动手。他们做的第一件事，是观察规律、创造秩序。

他们会为这次「三角形人口普查」，制定普查原则。比如，最简单的一种：「按底边所在的横线，从上到下，逐层统计。」

第一步：只看最顶上的一层（最小的三角形区域）

我们能看到，以最顶端的横线为底边的三角形，有 3 个（左、中、右）。

以同一个顶点，包含这两个小三角形的，有 2 个。

包含这三个小三角形的，有 1 个。

第一层总计：3 + 2 + 1 = 6 个。

第二步：只看中间的一层

我们发现，中间这层的结构，和最顶层是完全一样的！它同样包含了 3 个基本单位。

所以，以中间横线为底边的三角形，也必然是：3 + 2 + 1 = 6 个。

第三步：只看最下面的一层（最大的底边）

同样，以最底层横线为底边的三角形，也必然是：3 + 2 + 1 = 6 个。

第四步：加总

6 (顶层) + 6 (中层) + 6 (底层) = 18 个。

一个不多，一个不少。

这就是「发现/创造有序性」。

高手不是在胡乱数三角形，而是基于有序性，让所有符合条件的三角形「自动现身，排队报到」。

本书前面谈到丁文江的名言：

> 科学是教育和修养最好的工具，学科学的人有求真理的能力，而且有爱真理的诚心。无论遇见甚么事，都能平心静气去分析研究，从复杂中求简单，从紊乱中求秩序；了然于宇宙生物心理种种的关系，才能够真知道生活的乐趣。

要「从复杂中求简单，从紊乱中求秩序」，而寻找和建立有序性，就是一个重要落地途径。

把握思想的全局

我们前面谈到过，莱布尼兹基于易经辩证思维启发研究了二进制，而冯·诺依曼用它来建构了计算机体系。很多思想、工具和方法，都有演化、承接、启发关系。要看到全局。

这些「没有出现在考卷」的线索，决定了你的水平。

大多数考试题目，和你的理科水平，关系约等于零。

你刷也是那样，不刷也是那样。

没什么好刷的。

高手赶路，不追野兔。

递归性线索：俄罗斯套娃

在前面谈十进制的时候，我们已经介绍了递归性。

递归就像是俄罗斯套娃。一层套一层，你会发现同样的模式。

「没有什么问题是一包辣条不能解决的。如果有，那就再来一包」，这就是递归。

递归思维是一种重要的简化思路。它是「用一个方法来重复解决问题」。

十进制中，「逢十进一」，如果再次逢十继续进一，这就是递归思路。

后来到了小数，反个方向，「拆一为十」，也是递归。

问题来了，大家从小就学了十进制，但是很少会看到这背后的东西。

我最早接触递归这个概念定义，是在计算机算法教材中。

我们为了让机器进行有效的计算，需要明确把算法的思路确定下来。

建议每一位中学同学，去修一下计算机算法，因为其中的很多思想非常重要。

虽然 AI 时代，编程很多时候都不用写代码让 AI 干了，但是算法的思维训练价值，还是非常高。

类似于有序性，有些时候对解决问题，你甚至可能要创造一种递归性，从而简化问题。

例如，自然归纳法，就是一种递归思想的运用。

如果我们想要证明对于所有自然数，某个命题成立。

「证明所有成立」，涉及到无穷的数。

如何以有限破无穷呢？

我们可以分为两步走：

1）证明当 n=1 时命题成立

2）假设当 n=k 时命题成立，证明在此基础上 n=k+1 成立。

这个思路下，也就是说，一旦 n=1 时命题成立，那么 n=2 时也就命题成立。而一旦 n=2 时命题成立，那么 n=3 时命题也成立……以此类推，我们就把所有自然数情况下命题成立证明完了。

它把无穷的证明任务，简化为了有限的两个步骤。

非常聪明的想法。

学习数学，让自己头脑变的更聪明，很大程度也就是把这些聪明的思想，吸收到自己的头脑中，并指导自己的思考和实践。

如果我们日常是这样的学习，那么在解题和课本知识的学习中，就已经学到了一系列的简化思想、方法和经验案例，头脑变的更强大，未来遇到复杂问题，也就更容易简化了。

然而在学校教育中，只有知识的灌输，却很少引导大家去发现、欣赏和吸收「数学的聪明」。

等价性线索：寻找不变的本质

回顾方块牌的逻辑，我们的方块牌，围绕几种线索展开：

一、 结构性线索: 关注事物内在的秩序与自我重复的模式

- K: 对称性
- Q: 周期性
- J: 有序性
- 10: 递归性

二、 等价性线索: 寻找在变换中，那些保持不变的本质

- 9: 不变性
- 8: 等价关系

三、 相似性线索: 在不同事物间，寻找可类比的模式与特征

- 7: 类比
- 6: 模式识别
- 5: 比例、相似与全等

四、 特殊性线索: 通过研究极端或特殊情况，来洞察一般规律

- 4: 极端情况
- 3: 特殊值
- 2: 边界条件

前面我们讨论了结构性线索，接下来讨论等价性线索。

不变性：在变化中寻找不变

很多问题的难点，在于条件多、变化多，没啥稳定的，看上去就复杂。

这种问题，你的第一反应应往往是需要去思考「有什么是稳定不变的呢？」，从这个角度去观察。

其实反过来想，「条件多变化多」本身也是一种信息，这种题目可能比较大概率是考察你寻找「不变」的能力。

例如如下题目：

> 两辆火车相距 200 公里，它们在同一条笔直的轨道上，开始相向行驶。
>
> 甲火车的速度是每小时 40 公里。乙火车的速度是每小时 60 公里。
>
> 在两车开动的同时，一只速度极快的蜜蜂，从甲火车的车头出发，以每小时 150 公里的速度，笔直地飞向乙火车。
>
> 当蜜蜂遇到乙火车后，它立刻掉头，飞回甲火车。遇到甲火车后，又立刻掉头飞向乙火车……
>
> 它就这样在两车之间，永不停歇地来回飞行。
>
> 问题：直到两辆火车最终相撞的-那一刻，这只勤劳的蜜蜂，一共飞行了多少公里？

这道题，勤奋的华生可能看到了就会试图计算：

- 蜜蜂第一次飞向乙火车，飞了多久，飞了多远？此时两车距离缩短了多少？
- 蜜蜂掉头飞向甲火车，又飞了多久，飞了多远？此时两车距离又缩短了多少？

估计然后就懵逼了。

当然从数学研究角度，这个思路下去是一个无穷等比数列求和问题。深入研究还是很有价值的。

但是在解题场景中，没有掌握无穷级数相关工具思想的情况下，那就完蛋了。

这种条件看上去很多变来变去的，一定要本能的想「有啥是不变的」。

那么这道题中，连接火车和蜜蜂的，有什么是共同的不变的呢？

那就是运动的时间。

火车开了多久，和蜜蜂飞了多久，是一致的，这个关系是不会改变的。

好了，就从这里入手。

第一步：计算总时间

两辆火车相向而行，它们的相对速度（逼近速度）是 40 + 60 = 100 公里/小时。

它们相遇需要的总时间 = 总距离 ÷ 相对速度 = 200 公里 ÷ 100 公里/小时 = 2 小时。

第二步：计算蜜蜂路程

既然蜜蜂的总飞行时间也是 2 小时，那么它的总飞行路程 = 蜜蜂的速度 × 总时间 = 150 公里/小时 × 2 小时 = 300 公里。

这里有个段子。

传说在面试时，冯 • 诺依曼曾经被问过这道题。

当面试官刚说完题目，冯 • 诺依曼几乎没有任何停顿，就直接报出了「300 公里」的答案。

面试官赞叹道：「您一定早就知道这个诀窍了吧？大多数人都会陷入那个无穷级数的陷阱里。」

冯 • 诺依曼却一脸困惑地回答：「什么诀窍？我不就是把那个无穷级数算出来了吗？」

在理科思维扑克中，不变性是方块 9，守护神是埃米 • 诺特。

如果说牛顿和爱因斯坦这些巨人，是在使用不变性来洞察宇宙，那么埃米 • 诺特，则是那个为「不变性」本身「立法」的、幕后的女王。

她证明了一个在物理学和数学中，一个深刻的规律：「诺特定理」。

这个定理的内容，用最简单的话来说就是：

自然界中的每一个「对称性」，都必然对应着一个「守恒量」（也就是不变的量）。

比如：

物理定律在时间的流逝中保持不变（时间平移对称性），必然对应着能量守恒（能量是不变的）。

物理定律在空间的平移中保持不变（空间平移对称性），必然对应着动量守恒（动量是不变的）。

诺特定理，是连接「对称性」与「不变性」这两张王牌的桥梁。它告诉我们，我们之所以能在变化的世界中寻找稳定，不是因为运气，而是因为宇宙的底层结构，就是由这种深刻的对称与守恒所支配的。

爱因斯坦说：「诺特是自女性开始受到高等教育以来，最杰出的、最有创造力的数学天才。」

这种不变性和对称性的关系，在我们寻找线索的时候也会经常用到。就是首先发现对称性，然后进而找到不变性，实现简化。

例如高斯的案例。

对于 1+2+3⋯+50。

不变性本来就在对称性中：

1+50=51 2+49=51 .....

再比如这道题：

> 小明从 A 地出发，前往 B 地，然后立即沿原路返回 A 地。A、B 两地之间的路线，由一段上坡路、一段平路和一段下坡路三部分组成。
>
> 具体路程如下：
>
> 去程的上坡路段长：6 公里；去程的平路路段长：3 公里；去程的下坡路段长：4 公里
>
> 小明的速度是恒定的：
>
> 上坡速度：每小时 3 公里；平路速度：每小时 4 公里；下坡速度：每小时 6 公里
>
> 问题：小明整个往返行程的平均速度是多少？

很多同学会直接开干。

别别别。

要多观察。

这种题目条件多，变化多。

速度在变、路程在变，还有来回（方向在变）。

请问有啥不变的？

我们观察，这里的第一个对称性，是「有来有回」。

来和回，对称了。

还有，「有上坡有下坡」。

基于这两个对称性，我们会发现第三个对称性「上坡会变成下坡，下坡会变成上坡」。

这样不变性是什么呢？

「上坡和下坡的总路程会相等，因为来时的上坡会变成去时的下坡，来时的下坡会变成去时的上坡」。

好了，抓住这个，就可以简化问题了。

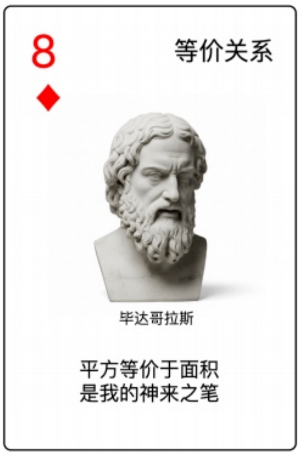
越是复杂的题目，你越要多观察，寻找破局线索。

等价关系：在不变中寻找变化

前面的「不变性」线索探索，往往是「在变化中寻找不变」。

而对等价关系线索的探索，反过来，是「在不变中寻找变化」。

在理科思维扑克中，「等价关系」是方块 8，守护神是毕达哥拉斯。



毕达哥拉斯诞生于靠近小亚细亚海岸的萨摩斯岛，他在游学时遇到了泰勒斯。在四处游学之后，他成立了一个兼具宗教、科学、哲学性质的帮派，也就是毕达哥拉斯学派。

前面谈到，理科的创始人，也是第一位自然哲学家泰勒斯发明了「数学证明」，用来验证猜想的正确性。

他的发明动机，是从严谨性的角度，追求结论的可靠、推理的严谨。

这是理科的基础。

毕达哥拉斯曾经拜访过泰勒斯，应该也是从他那里学到了证明这个方法。

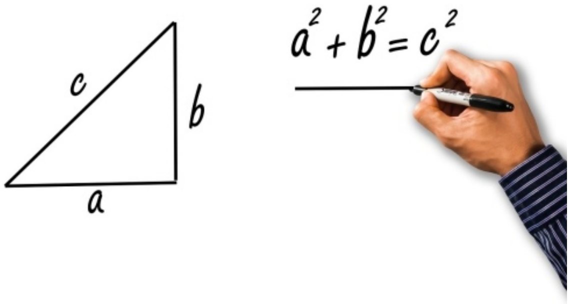
但是毕达哥拉斯和他的学派，把数学证明进一步的发扬光大了。

他们对勾股定理的证明不仅严谨，而且很巧妙，高度体现了数学思想的美丽优雅。

中国古代有勾三股四弦五的发现，简单的说，我们通过观察测量发现，对于直角三角形，如果直角边是 3、4，那么斜边长度为 5。

进一步的，基于测量观察，似乎可以得出一个通用结论：

对于直角三角形，两直角边长度的平方之和，等于斜边长度的平方，也就是$a^2 + b^2 = c^2$。



但是这些都是有限的经验总结，我们能否证明，对于所有的情况，这个结论都适用呢？

毕达哥拉斯学派最后做出了证明。

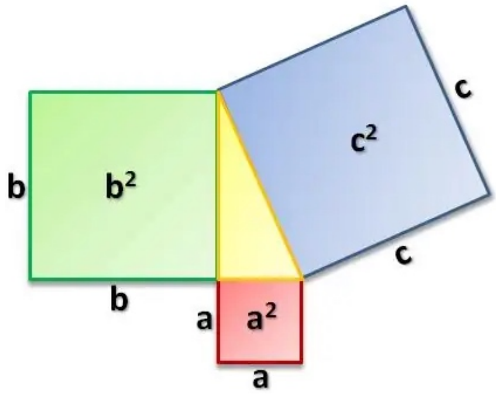
为了庆祝他们做出了这道伟大的证明题，传说学派杀了一百头牛，非常有仪式感和食用性的大举庆祝。

那么，到底如何证明这个结论呢？

这里的关键，就是等价关系的发现和利用。

一个数 a 的平方，等价于以 a 为边的正方形的面积。

所以要证明$a^2 + b^2 = c^2$，等价于证明边长为 a 的正方形面积，加上变成为 b 的正方形面积，等于变成为 c 的正方形面积。



这样把一个代数问题，转化为几何问题。

后续的证明有很多资料，也有多种证法，我不讲了，很容易找，大家也可以自己思考。

关键是，你要看到这个「等价关系」的发现，这才是神来之笔。

那么问题来了，为什么他们会发现这样的关系呢？很多时候你需要本身对研究关系敏感，否则关键时刻就根本链接不上。

所以死记硬背非常有害，你记住很多又怎么样呢？根本就没有发现他们的关系、推理过程和规律，只有自己研究的，才会对关系有更强的把握。

我们想一想，为什么面积和乘法有等价关系？

因为本身我们定义面积，就是用单元面积，然后数个数，其实是用「数量关系（有多少个单位面积）」来定义了「面积」（有多大）。

而长方形的数量，可以用两个边乘法来计算。

很多同学是记住了结论：面积 = 长 x 宽。

根本没经过那个研究推理过程，这种自然就头脑链接弱。

另外就是我们本章的主题观察能力，你看了，一眼$a^2 + b^2 = c^2$。然后就没有然后了。

观察能力强的同学，看一眼头脑往往就开始「看到面积」。

很多题目就是这样看到线索一眼搞定的。

那么这个等价性，你学到了吗？

题目来了。

能否参考毕达哥拉斯定理证明思路，来解决鸡兔同笼问题呢？

看上去毫无关系是吧？

但是请仔细想想。

会有解法。

毕达哥拉斯定理的证明，让整个学派欣喜若狂。然而没想到的是，这个证明后来引发了一场惊天危机。

在这场危机中，有人被谋杀灭口，然而依然挡不住真相。

历史上称为第一次数学危机。

而有理数和无理数概念的产生，也是源于这次危机。

很多同学到初中上来接触有理数比较懵，一个原因就是，他们根本没搞清楚有理数的背景。

相似性线索：寻找相似之处

回顾方块牌的逻辑，我们的方块牌，围绕几种线索展开：

一、 结构性线索: 关注事物内在的秩序与自我重复的模式

- K: 对称性
- Q: 周期性
- J: 有序性
- 10: 递归性

二、 等价性线索: 寻找在变换中，那些保持不变的本质

- 9: 不变性
- 8: 等价关系

三、 相似性线索: 在不同事物间，寻找可类比的模式与特征

- 7: 类比
- 6: 模式识别
- 5: 比例、相似与全等

四、 特殊性线索: 通过研究极端或特殊情况，来洞察一般规律

- 4: 极端情况
- 3: 特殊值
- 2: 边界条件

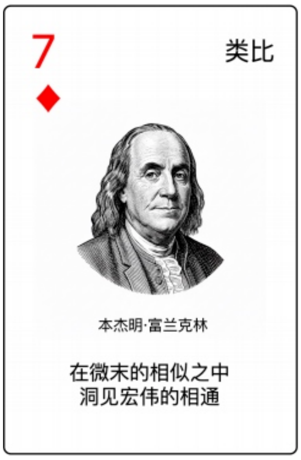
前面我们讨论了等价性线索，接下来讨论相似性线索。

类比：从现象中发现类似和参考

类比和模式识别这两者有些相似，我单独列出两张牌是因为，从概念上：

- 类比主要是从现象出发比较
- 模式识别主要是从内在规律出发比较

方块 7 类比，守护神是本杰明•富兰克林。



富兰克林是 18 世纪最伟大的思想家和科学家之一。他最著名的科学成就——证明「闪电是一种电」，就是一次跨越天地的、伟大的类比。

在他之前，人们普遍认为，天上的闪电，是上帝的怒火，是一种超自然的力量；而地上的、由摩擦产生的静电，则是一种温和的、可以被研究的物理现象。这两者，被认为是完全不同的东西。

但富兰克林，这位敏锐的观察者，却在它们之间，发现了一系列惊人的「相似之处」：

- 它们都会发光
- 它们都发出相似的爆裂声
- 它们都能点燃物体
- 它们都能熔化金属
- 它们都倾向于被尖锐的金属物体所吸引

基于这些现象上的类比，富兰克林提出了一个大胆的假设：天上的闪电，会不会和我们实验室里制造的电，本质上是同一种东西？

为了验证这个假设，他进行了那个著名的、极其危险的「风筝实验」。他成功地从雷雨云中，将「天火」引到了莱顿瓶里，最终无可辩驳地证明了他的猜想。

「类比」这把武器，它能帮助我们在好像缺少联系的事物之间，建立起一座沟通的桥梁，从而将我们在一个领域的已知经验，迁移到一个全新的、未知的领域中去。

在数学学习中，通过类比发现线索也是提高学习效能的重要武器。

例如初中上来的「整式」，很多同学就开始死记硬背了。

你要想想，「整式」这个，好像这个「整」，我们学过整数吧？

再看看整式的一些知识，好像可以参考「整数」的研究，类比到「整式」的研究。

整数会研究什么呢？

运算规律。

那么整数下来有什么数？分数和小数？

会不是有分式和小式呢？

按照这种基于类比的「研究逻辑」，掌握起来其实是很快的。

等于你建立了一个框架，在已有的经验知识上去学习，而不是从头干。

死记硬背一个大问题，就等于啥都从头干，累死。

我们看大雁的飞行，通常是成群结队成人字形飞翔的。

这里有空气动力学的原理。

和飞机飞行类似，大雁飞行靠的是升力。

这种升力，大雁是靠扑腾产生的。

这种扑腾很费劲。

然而如果一群大雁排成人字形飞，后面大雁可以利用前面大雁所产生的上升气流。这样利用群体结构，飞行的体能消耗就节省很多。

数学知识的学习，也是类似的原理。

死记硬背，就像是每只大雁都单独飞，非常费力。

类比，就是一种跟着大雁飞的方式。

模式识别：从规律中发现类似和参考

相比类比，模式识别要更深一些，是从规律中发现类似和参考。

方块 6 模式识别，守护神是开普勒。

他最知名的成就，是发现了行星运行规律（开普勒三定律）。

开普勒是一位对「模式」有着宗教般痴迷的天文学家。他坚信，宇宙必然是由某种深刻的、和谐的数学模式所支配的。

他的三大定律，正是他从第谷·布拉赫留下的、看似杂乱无章的海量行星观测数据中，「识别」出的、隐藏在背后的宏伟运行模式。

但他的探索，并未止步于天际。开普勒还对地面上的一些自然现象，表现出了同样浓厚的兴趣。比如，他曾深入研究过一个看似与天文学风马牛不相及的问题：斐波那契数列。

这个数列（1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…）最初是由中世纪数学家斐波那契，在研究「兔子繁殖问题」时提出的。它描述了一对兔子，在理想情况下，其后代数量逐月增长的数学模式。

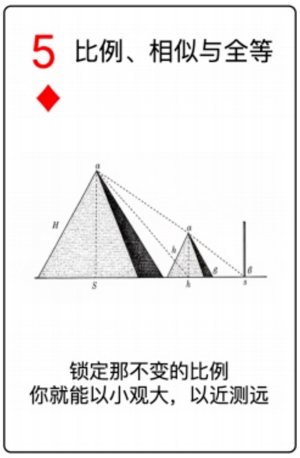
开普勒敏锐地「识别」出，这个描述「兔子繁殖」的数列，竟然与植物学中花瓣的数目、向日葵籽盘的螺旋线数目等现象，遵循着完全相同的数学模式。

模式识别这把武器，让我们在不同现象的「底层规律」中，找到共通之处。

比例、相似与全等

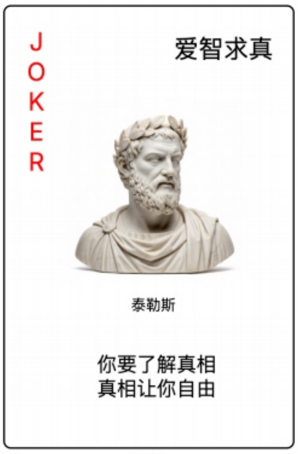
在相似性线索中，数量上「成比例」是一种常见的类型。

而相似与全等，可以看作几何上的成比例。

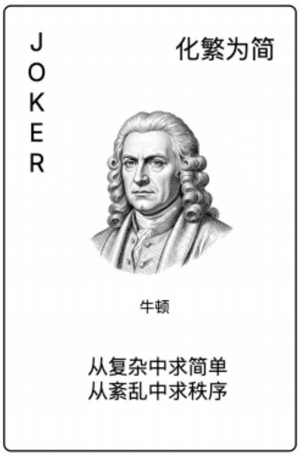


利用成比例/相似解题的一个经典案例，来自于泰勒斯。

然而泰勒斯作为理科祖师爷，已经出现在我们的大王牌「爱智求真」上了，所以方块 5 就没画他了。

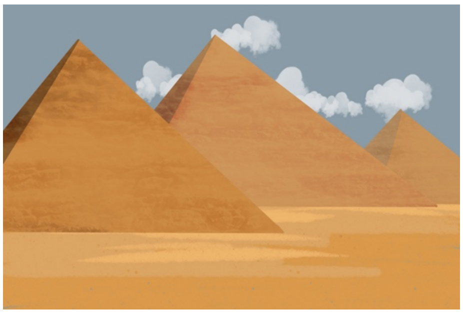


大王是「爱智求真」，是动机目的；那么如何求得真相呢，小王的「化繁为简」就是核心所在。



泰勒斯也是化繁为简的顶级高手。

泰勒斯有一个经典案例，就是对金字塔高度的测量。



我们知道埃及金字塔是人类文明的奇观。

那么到底它有多高呢？

金字塔是实心的，你没法简单的用吊根线的方式去测量。

那我们爬上去拉线测量，也只是测到的斜坡长度而非高度。

请记住那是在公元前，不是在今天，科技和数学都不发达。

测高度太麻烦了，按照「化繁为简」的思路，能不能有简单的呢？

泰勒斯用巧妙的方法，不测高度而测出了高度。

一天在有太阳的时候，他在金字塔附近，不时让人测量自己的影子长度。

然后等到影子长度和他的身高相等（用我们今天的话说，成了等腰直角三角形）。

他就让人去测量金字塔的影子长度。

基于相似三角形原理，这时候金字塔的影子和其高度应该也想等，这就是金字塔的高度了。

于是泰勒斯把「测高度」这个复杂问题，转化成「测影子长度」这个简单问题，漂亮的解决了。

不测高度而测得高度。

甚至他还等到正好两边长 1:1 的时候，这样连比例换算都省了。

很酷。

这就是高手境界。

追求简洁。

从这个角度，死记硬背别的不说，太复杂麻烦就足以让人觉得不行，会有更好的方案。

所以高手往往是对死记硬背有本能的警惕，他们会去探索更好的办法。

如果你对死记硬背习以为常，那就糟糕了。

特殊性线索：从特殊情况入手

回顾方块牌的逻辑，我们的方块牌，围绕几种线索展开：

一、 结构性线索: 关注事物内在的秩序与自我重复的模式

- K: 对称性
- Q: 周期性
- J: 有序性
- 10: 递归性

二、 等价性线索: 寻找在变换中，那些保持不变的本质

- 9: 不变性
- 8: 等价关系

三、 相似性线索: 在不同事物间，寻找可类比的模式与特征

- 7: 类比
- 6: 模式识别
- 5: 比例、相似与全等

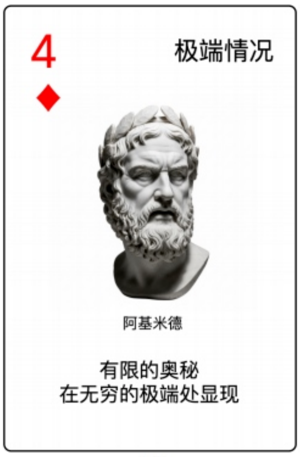
四、 特殊性线索: 通过研究极端或特殊情况，来洞察一般规律

- 4: 极端情况
- 3: 特殊值
- 2: 边界条件

前面我们讨论了相似性线索，接下来讨论特殊性线索。

关注极端情况：剑走偏锋

当问题看不清楚时，找一个最极端的看看。



例如，对于鸡兔同笼问题：

鸡兔同笼，共 38 个头，112 只脚，那么鸡有多少只？兔有多少只？

这道题的复杂性在于，「又有鸡又有兔子，脚数量还不一样，难以看懂」。

那么我们尝试极端看看。

- 思路 1: 如果兔子数量为 0，会怎样
- 思路 2: 如果兔子也只有两只脚，会怎样

从思路 1，那么一共应该是 76 只脚。

从思路 2，那么一共也应该是 76 只脚。

但是注意，其实这是极端情况的两个思路，只是这个案例中推导出来的线索数量一样。

我接下来就直接用思路 2 为例。

本来是 112 脚，我们很极端认为兔子只有 2 只脚，于是最后应该是 76 只。差了 36 只。

为啥会有这个 36 的差异呢？

因为每只兔子少算了两只脚。

所以最后应该是 18 只兔子。

现实中做人不要极端，但是解题中「寻找极端化线索」是一个非常有用的思路，因为极端情况容易暴露出一些线索。

寻找特殊值：从特殊到普遍

严格的说，极端情况也是特殊值，但逻辑和我们「寻找特殊值」不一样。

极端情况是找极端案例来暴露线索，寻找特殊值是基于「从特殊到普遍」的原则，尝试通过特殊值研究找到更普遍的规律。

例如鸡兔同笼问题，如果用寻找特殊值，往往就是看看：

- 如果没有兔子会怎样呢（计算：一共 76 只脚）

- 如果是一只兔子呢（计算：一共 78 只脚）
- 如果是两只兔子呢（计算：一共 80 只脚）

这样通过分析一些特殊值，来找到普遍规律。

在理科思维扑克中，特殊值是方块 3，守护神是波利亚。

波利亚写过一本书《如何解题》，讲数学题的解法。

今天很多家长和同学可能都知道要列出条件、列出求解的问题之类的解题步骤。

其实这套方法之所以普及，很大程度是因为波利亚。

在上个世纪，他做了很多普及解题法的工作，尤其是针对教师群体的教育。于是一些方法就通过教师流传下来了。

然而我要说，大家今天在学习什么「仔细审题、画出条件啊」之类的，没多少用，学到的只是波利亚的皮毛。

在应试教育下面，非常容易买椟还珠。

波利亚的「如何解题」这本书，其实真正厉害的地方，是探索式的解题法，是为了攻克未知难题，而非去解决已知问题。

这是屠龙刀。

在应试教育里面，找出了几个表面性的「仔细审题」可操作步骤，不痛不痒。

应试教育那个「灌输套路、熟练刷题、这样下次可以用套路」，跟波利亚《如何解题》想要训练的自主研究探索能力，是两码事。

屠龙刀化为指甲刀。

其实波利亚还写过一本《数学的发现》，这个名字更精彩，更符合数学的性质。

我们方块的观察智慧是干嘛的？

就是在做「数学的发现」。

当然前面现象部分的武器，为发现奠定了更底层的基础。

数学这样拼洞察力的学科，很多时候你看到了、你发现了，就水落石出了。

顶尖高手，非常善于观察发现。

而不是你刷的多、刷得细。

在狭隘范围刷题反而是非常有害的。

在《庄子》中有一个「三季虫」的故事。

有一天孔子的学生正在门外扫地，来了一位穿着绿衣服的客人。客人问他：「您是孔子的学生吗？」学生自豪地回答说是。

客人接着问：「那我请教您一个问题，一年到底有几季？」

学生心想这太简单了，便回答说：「当然是四季啊。」

没想到，客人摇着头说：「不对，一年只有三季。」

两人为此争论不休，一直争到孔子出来。客人对孔子说：「您来评评理，一年到底有几季？」

孔子仔细地打量了一下客人——他发现，那客人的全身都是绿色的——然后，孔子说：「你是对的，一年确实只有三季。」

客人听完，心满意足地走了。

学生非常不解，问孔子为何要这样说。孔子回答道：「你没看到那个人通体碧绿吗？他是一只蚱蜢。蚱蜢春天生，秋天就死了，它的一生，从来就没有见过冬天。你和他争论四季，就算争到天黑，也是没有结果的。」

这就是「夏虫不可语冰」。

天天围绕茴香豆的 4 种写法刷题，就是三季虫，连一年有四季都不知道。

要打开视野，要去发现探索未知，而不是在已知的一亩三分地雕花。

关注边界条件：从临界变化中寻找线索

边界条件和极端值有些类似。

但边界条件更关注的是「临界变化」。

同样用鸡兔同笼为例：

鸡兔同笼，共 38 个头，112 只脚，那么鸡有多少只？兔有多少只？

用「寻找边界条件」思考，如果一开始都是鸡，鸡兔数量逐渐变化，什么是一个变化的边界呢？

鸡兔数量相等的时候。

这个点前面，鸡都在增加兔子在减少；往后相反。

在相等点达到平衡。

那么这个相等点情况是什么？

一共 38 只，那么相等就是各 19 只。

这时候有多少脚呢？

(2+4)x19 = 114。

哎呀，离我们 112 非常近了。

下面简单不说了。

在理科思维扑克中，「边界条件」是方块 2，它的守护神，是法国数学家傅里叶。

傅里叶一生都在研究热量的传导和波动。他最伟大的发现之一就是：任何一个复杂的波，无论它看起来多么不规则，都可以被看作是由许多个简单的、规则的正弦波和余弦波叠加而成的。

而决定这个复杂的波最终形态的关键，恰恰是它的「边界条件」。比如，一根琴弦，它的两端是被固定住的（边界），这决定了它只能发出特定频率的音高。

傅里叶的思想告诉我们：各种复杂的变化，都由其最开始的、最简单的「边界状态」所限定。 抓住了边界，你就抓住了整个系统的命脉。

总结：观察智慧与观察能力

我们的方块（观察智慧），其统领牌 A，守护神是福尔摩斯。

理科本身就是侦探真相的学科。

只是并不是侦破罪案，而是侦破客观真相。

你需要像福尔摩斯一样敏锐、挖掘线索。

这就需要强大的观察能力。

在《波希米亚丑闻》里，福尔摩斯对华生说：

> 你只是看见，而我却是观察。这两者之间，有天壤之别。(You see, but you do not observe. The distinction is clear.)

当时，福尔摩斯问华生，从他们公寓的窗户，通往华生诊所的楼梯有多少级。华生说他不知道，尽管他每天都要走上几百遍。而福尔摩斯却清楚地说是十七级。

这就是「看见」与「观察」的差别。「看见」是被动的接收信息，而「观察」是主动地、有目的地去研究和分析。

从观察中寻找线索。

那么到底要寻找什么线索呢？

在数学研究中，有 4 种类型的常见线索。我们的方块牌，也就围绕这几种线索展开：

一、 结构性线索: 关注事物内在的秩序与自我重复的模式

- K: 对称性
- Q: 周期性
- J: 有序性
- 10: 递归性

二、 等价性线索: 寻找在变换中，那些保持不变的本质

- 9: 不变性
- 8: 等价关系

三、 相似性线索: 在不同事物间，寻找可类比的模式与特征

- 7: 类比
- 6: 模式识别
- 5: 比例、相似与全等

四、 特殊性线索: 通过研究极端或特殊情况，来洞察一般规律

- 4: 极端情况
- 3: 特殊值
- 2: 边界条件

高手的一个本事，就是路子广。

这条路不行那一条，条条道路通罗马。

而要做到这一点，你要有牌。

就像我在本章中，针对「鸡兔同笼」这个耳熟能详的案例，我们就用不同的牌去找到了线索。

所以在学习中，不要基于求解翻答案，要本能的思考观察，到底目前的现象，有哪些方向的线索呢？

不要做华生，要做福尔摩斯和高斯。

有些时候，看到线索就直接终结了比赛。

但还有一些复杂情况，依旧是迷雾重重，你需要更多的思考策略。

侦探情报工作暂时告一段落，需要将军登场运筹帷幄。

第四章：黑桃（谋略智慧）

从数理思维到通用智慧

回顾我们理科思维扑克牌的结构：

1）两张王牌、两条宪法

- 大王🌟 (爱智求真)
- 小王🪄 (化繁为简)

2）四种智慧、四大能力

- 红桃♥️ (表达智慧): 表达能力
- 方块♦️ (观察智慧): 观察能力
- 黑桃♠️ (谋略智慧): 谋略能力
- 梅花♣️ (哲思智慧): 哲思能力

前面我们讨论了红桃和方块。

整体来说，绝大多数红桃和方块牌，主要还是在数理学科的范围之内。

而接下来的黑桃和梅花，会有重要的差异，这两者的核心牌，基本上都是「通用智慧」，高度跨领域。

通用智慧可以粗略分为两大部分：

- 认知智慧：深度的本质洞察
- 实践智慧：高超的策略水平

我们的黑桃对应着实践智慧，梅花对应着认知智慧。

当然这两者其实是相辅相成，实践是 how，认知是 why & what，所以顶尖的高手，通常是两种智慧的融合，认知与实践打通。

也因此，大家在黑桃和梅花上，要注意以数理学科为手段，以修炼通用智慧为目的。

最高的策略智慧：孙子兵法

统领策略牌的黑桃 A，守护神是孙子，战略学的祖师爷。

谈策略就就谈「孙子兵法」。

孙子兵法，成书于春秋时代。一直到今天，依然是世界顶尖的战略著述。

学者曾经怀疑，这本书是后人伪作。因为在那个时代，几乎所有著作，都是散文集，缺乏严密的内在结构。而「孙子兵法」不同，全书可以分为几个大的部分，逻辑缜密，环环相扣。单纯从这一点，已经超越了那个时代。

一直到山东银雀山的考古发现，才确定孙子兵法并非后人的伪作。

而孙子的战略思想，更远远超越了那个时代，也超越了单纯的军事范畴。在美国亚马逊上，它的英文版，是哲学类排名第一的畅销书。

孙子战略思维中最重要的部分，是「全胜思维」。用他自己的话说，是「必以全争于天下」。

那么到底什么是「全」呢？要理解这一点，首先要理解「用兵之害」。

> 凡用兵之法，驰车千驷，革车千乘，带甲十万，千里馈粮，则内外之费，宾客之用，胶漆之材，车甲之奉，日费千金，然后十万之师举矣。
>
> 其用战也胜，久则钝兵挫锐，攻城则力屈，久暴师则国用不足。夫钝兵挫锐，屈力殚货，则诸侯乘其弊而起，虽有智者，不能善其后矣。故兵闻拙速，未睹巧之久也。夫兵久而国利者，未之有也。故不尽知用兵之害者，则不能尽知用兵之利也。
>
> ……
>
> 故兵贵胜，不贵久。故知兵之将，生民之司命，国家安危之主也。

应试教育，就是典型的「钝兵挫锐」。学生天天都在学习，晚上还要加班加点。看上去努力，其实人都疲了，士气低落，效率不高。而且这种情况持续，还可能造成严重的心理问题，也占用了大量时间精力，难以让学生有生活、有发展。

那到底应该怎么办呢？孙子提出了他的见解：

夫用兵之法，全国为上，破国次之，全军为上，破军次之；全旅为上，破旅次之；全卒为上，破卒次之；全伍为上，破伍次之。是故百战百胜，非善之善者也；不战而屈人之兵，善之善者也。

故上兵伐谋，其次伐交，其次伐兵，其下攻城。攻城之法为不得已。修橹轒辒，具器械，三月而后成，距堙，又三月而后已。将不胜其忿而蚁附之，杀士三分之一而城不拔者，此攻之灾也。

故善用兵者，屈人之兵而非战也，拔人之城而非攻也，毁人之国而非久也，必以全争于天下。故兵不顿而利可全，此谋攻之法也。

孙子说「上兵伐谋」，要「兵不顿而利可全」。兵不顿，是低成本；利可全，是高收益。这两者结合，就是「全胜」。

这也是一种投资视角。

兵不顿，是低成本；利可全，是高收益。学习跟打仗一样，要算账，要成本低收益高。

不要亏本。

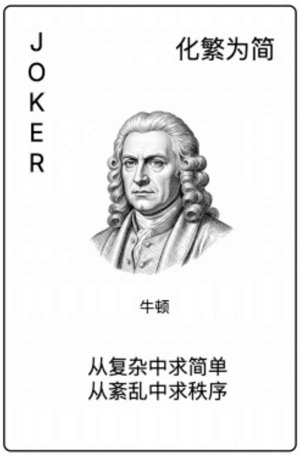
天天刷题的同学，亏死了。

我们要「全胜」，要「上兵伐谋」。

那么最重要的谋略有哪些呢？

如何化繁为简？简化的 5 大策略

回顾我们的小王，理科宪法第二条「化繁为简」。



探索真相，都是要围绕「对复杂性有效简化」。

那么具体如何简化？

有 5 种最重要的简化策略。

这 5 项策略，并不是数学领域的专属，而是本质上源于人类和世界交互的 5 个核心行为。因为它是各个领域，求得真相解决问题的利器。

概要的说，人类和世界，有 5 种基本交互：

- 适应世界
- 感受世界
- 理解世界
- 连接世界
- 改变世界

对应这 5 种交互，有 5 大核心策略。它们成为了「求真五星旗」的 5 颗星。

起源	策略	核心定义
适应世界	**演化策略**	通过从最简单、最特殊的案例入手，遵循事物演化规律，逐步推演。
感受世界	**形象策略**	通过图形、空间、比喻和物理直觉等形象化方式感受事物。
理解世界	**抽象策略**	通过符号、规则、原理、模型和公理等抽象方式来理解事物。
连接世界	**转化策略**	转化事物、转化概念、转化方向、转化视角
改变世界	**创新策略**	设定新的规则、标准，创造新的事物和场景

解决任何难题，破解各种迷雾，往往都是基于这 5 种核心策略和组合，来落实简化。

黑桃 K：演化策略

演化策略的守护神，是笛卡尔。

在数学史上，笛卡尔发明了坐标系，创造了解析几何。

这背后，是他深厚的底层智慧。

笛卡尔非常重视演绎策略，他在《谈谈方法》中说：

> 从最简单、最容易认识的对象开始，一点一点、一步一步上升到对最复杂对象的认识。

这简直是演化策略的标准定义。

但只是一半，因为他重点谈认知。

这是认知的一半。

实践角度，演化策略就是从基本的、最简单的开始，一步步推进。

一样的逻辑。

继续用「鸡兔同笼」为例：

> 鸡兔同笼，共 38 个头，112 只脚，那么鸡有多少只？兔有多少只？

我们在「王炸」部分分享的简化思路，其实应用的就是演化策略：

> 这题目我们没见过没做过，怎么思考呢？
>
> 好像做不出来呀，太复杂了。
>
> 我们能不能【简化】呢？从题目中【简化】出我们能做的，然后看看如何逼近到最终的问题？
>
> 那么，这道题的【复杂性】在哪里呢？
>
> 因为又有鸡又有兔子，很难计算，无从下手。
>
> 要是【简化】的话，就应该是只有一种动物，这样简单很多。【演化：最简单的情况】
>
> 那么我们假设笼子里只有鸡，一共 38 个头的话，就应该有 38 只鸡。

每只鸡两只脚，那就是 76 只脚。

然而题目里一共是 112 只脚。差了 36 只。

这个差异怎么来的呢？有些兔子被我们假设成鸡了。

那么到底有多少兔子呢？

这个比较复杂，难以想清楚，我们就一步一步来嘛【演化思维】。

目前我们假设所有都是鸡，没有兔子。

那么我们走出一小步，如果有一只兔子呢？【演化：从没有兔子到一只兔子】

这时候应该是 37 x 2 + 1 x 4 = 78 只脚。

或者，因为少了一个兔子多了一只鸡，而兔子比鸡要多了两只脚，所以应该是 76 + 2 = 78 只。

如果有两只兔子呢？那就应该是 78 + 2 = 80 只。【演化：从一只兔子到两只兔子】

这样我们也就能找到规律了。

每用一个兔子换掉一只鸡，就会多出两个脚。

而目前我们差异是 36 只脚，36 / 2 = 18。

应该有 18 只兔子，而鸡是 38 - 18 = 20 只。

验算一下： 2 x 20 + 4 x 18 = 40 + 72 = 112 只。

正确。

在这个解题思路中，我们基于「演化策略」，实现了一步步演化：

1. 研究没有兔子的情况
2. 研究一只兔子情况
3. 研究两只兔子情况

从线索的角度，其实这里用到了「特殊值线索发掘」。前面已经讲过了。

所以各种牌其实有相互关系，往往组合运用。或者多个角度，都能产生思路。

演化策略之所以有效，因为它遵循的是最基本的事物/认知发展规律。

然而在应试教育中，普遍违背了演化规律。

例如，你要先理解基础知识，然后才能刷题巩固知识。

应试学习不关注基础知识理解，让大家死记硬背，强行刷题。

跳步了。

一楼都没修就修二三楼。

所以非常愚蠢。

一问就是「如果你不行，那就多刷题」。

没有有效的策略，只有蛮干。

基于演化策略，当问题太复杂的时候，你需要循序渐进的解决，不能一口吃个胖子。而且要从此前的经验中沉淀和借力。

笛卡尔说：

> 我所解决的每一个问题都将成为一个范例，以用于解决其它问题。

他还说：

> 如果我在科学上发现了什么新的真理，我总可以说它们是建立在五六个已成功解决的问题上；它们也可以看成是五六次战役的结果，在每次战役中，命运之神总是跟我在一起。

高手往往是复利很高，他们的整个学习研究过程就是在持续演化，能够从一次胜利走向下一次胜利，步步高。

反过来应试学习，大家看上去很拼命，其实这些刷题、或者上课的各种行为之间，很少有演化承接的逻辑，总是在一楼死记硬背从头干，所以费力不讨好。

这就像打牌，菜鸟打一张牌往往就是应对当前的局面，被动而零散。高手是对局势有一个整体的判断和规划，打牌是在为后面的打基础，让局势演化到自己期望的逻辑，整体就是一条演化路径。

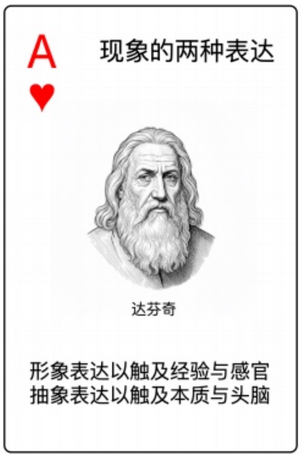
所以不要看你有多努力，光努力是成本，不是收益。关键你是不是规划演化的路径和终局，并且付诸实现。

黑桃 Q：形象策略

黑桃 Q 和 J，分别是形象策略和抽象策略。

大家还记得我们现象的红桃 A 吗？

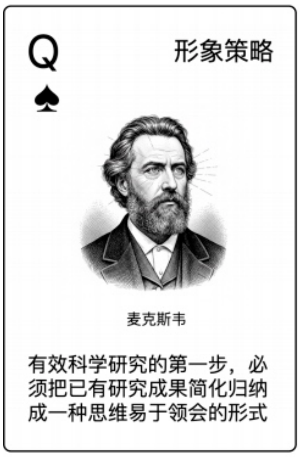
其中指出两种表达：



形象表达和抽象表达，其实可以认为是源于「形象策略」和「抽象策略」，在表达方面的具体化。

形象和抽象本身就是辩证关系，相辅相成，经常共同出现。

让我们先看形象策略：



形象策略的守护神，是麦克斯韦。

1856 年 2 月，麦克斯韦在剑桥哲学学报上发表了第一篇电磁学论文《论法拉第力线》，他环顾了当时电磁学研究的现状，指出虽然已经建立了很多实验定律和数学理论，但未能揭示各种电磁现象之间的联系，他写道:「电科学的现状看来特别不便于思索。」

他认为:

> 有效的科学研究的第一步，必须把已有的研究成果简化和归纳成一种思维易于领会的形式。

而形象化往往会让思维容易理解。

麦克斯韦的天才之处，在于他拥有一种将极其抽象的数学，与极其具体的物理形象，进行无缝连接的非凡能力。

当时，法拉第通过实验，已经提出了「力线」这个形象化的概念，来描述电场和磁场。但这些「力线」，在很多数学家看来，只是一个粗糙的比喻，不够严谨。

而麦克斯韦，非但没有抛弃这个「形象」，反而将它推向了极致。他开始想象：

- 如果这些「力线」，是一种真实存在的、像流体一样在空间中流动的「以太」呢？
- 如果磁力线，是这个流体中正在旋转的「小涡旋」呢？
- 如果两个涡旋直接接触会摩擦损耗，那么在它们之间，是不是应该有一些像「滚珠轴承」一样的小颗粒（他称之为「电粒子」），来让它们顺畅地转动呢？

他在脑中构建的，就是这样一个充满了齿轮、涡旋、滚珠的、极其复杂的、维多利亚时代蒸汽朋克风格的「宇宙机械模型」。

正是基于这个极其大胆、极其形象化的物理直觉，他开始进行数学推导。奇迹发生了——这个看似荒诞的模型，竟然完美地推导出了一组可以统一电、磁、光所有现象的、有史以来最深刻的数学方程组——麦克斯韦方程组。

麦克斯韦用他的实践证明：最深刻的抽象，可能就隐藏在最大胆的形象之中。

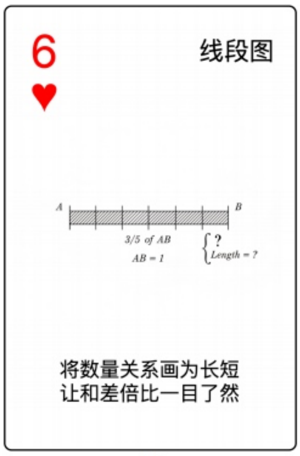
在数学课本中，关于抽象策略的应用比比皆是。毕竟我们课本的一个核心，就是从现象中提炼抽象本质规律。大家顺着这个思路，理解课本就容易。

那么，形象思维如何用到解题中呢？

还是用鸡兔同笼为例：

鸡兔同笼，共 38 个头，112 只脚，那么鸡有多少只？兔有多少只？

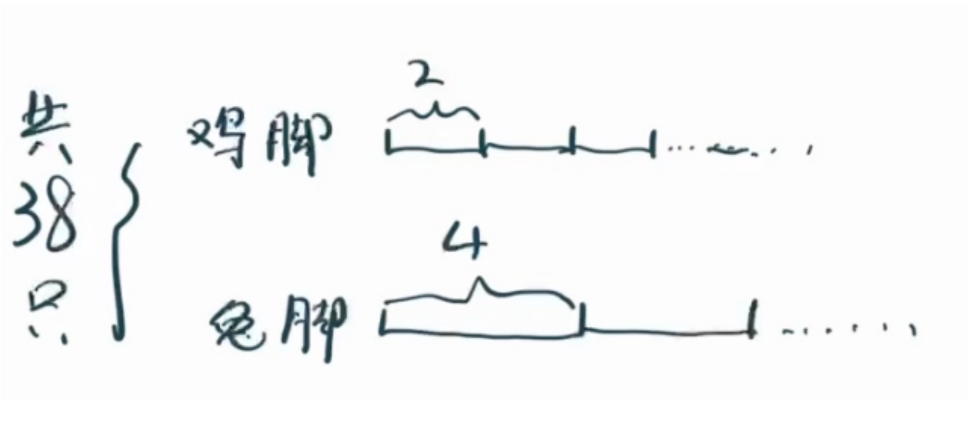
让我们考虑采用一个常用的表达智慧：线段图。



目的：通过画线段图直接的看到关系。

这道题画线段图还是有点难度的，没那么直接。

我们如果用通常小学阶段线段图的画法，例如首先分别把鸡和兔的总脚数看看能不能画出来？



画起来很尴尬，因为鸡的数量和兔子数量都不知道，两条线都没法合拢。

另外一方面，鸡兔一共 38 只这个条件，在线段中没有用上。

所以现在问题来了，我们怎么能把一共 38 只这个条件用上去呢？

这时候你要进一步分析了。

为什么 38 用不上呢？

如何能够用上 38 呢？

核心是鸡和兔脚数量不一样。

基于简化思路，能不能尝试让鸡和兔脚一样呢？

我们如果把兔子的脚只拿两只出来，另外两只当替补，好像就可以了吗？

甚至我们可以造一个概念（这个是为了更容易自己理解，没这个概念也行），那就是每只兔子 4 只脚，两只主力上场，两只替补候选。

这样我们从不相等，制造了一个相等。

鸡两只脚都是主力，没有替补。

主力可以一起打比赛了，对等了。

甚至这个题，你可以进一步形象化，问自己，为什么鸡脚和兔脚数量不一样？

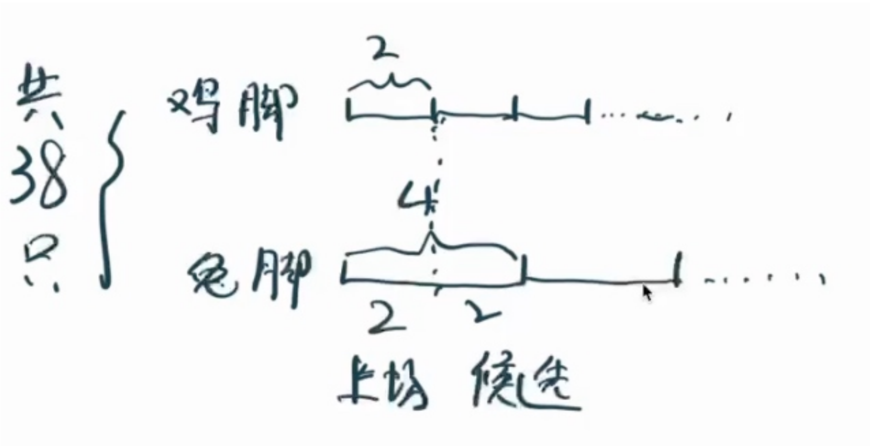
鸡有两只爪子，两个翅膀，翅膀不能算脚，因为不粘地。

兔子两个前脚，两个后脚。

那么我们可以把鸡的爪子叫做后脚，翅膀叫做前脚（进化了，不占地了）。

这也会产生一个同样的概念和相等的，后脚。

其实这些都是便于理解形象，核心是从简化出发，把兔子的脚做个分离，产生两只脚，这样可以跟鸡脚相等。进一步可以发挥我们这个一共 38 只的条件。



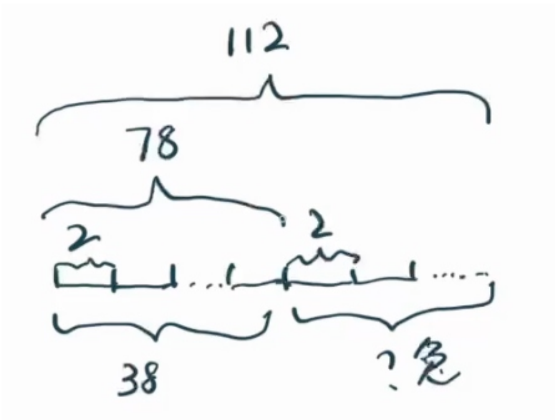
那么怎么发挥呢？

其实这就是创造了一个不变性线索：兔子的主力脚（2 只）是和鸡的主力脚（2 只）相等的。

没有不变性，创造不变性。

那么我们主力部分一共多少脚呢？这就是确定性了，反正无论如何每个动物都是 2 只脚。也就是说，每只动物的主力脚数量守恒，可以简化问题。

画线段图可以把主力脚部分完整的画出来。



而剩下的，就是兔子的「替补脚」，这样画图就可以画了。

只有一个未知数量。

搞定收工。

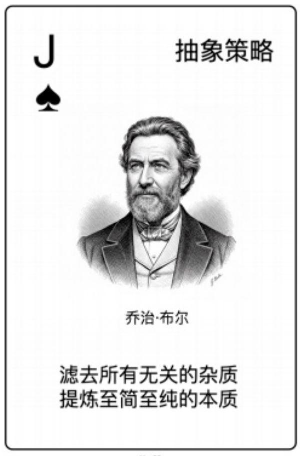
形象策略是非常强的策略，因为它契合了我们的感官、现实经验。

和其它牌组合，更能发挥其威力。

黑桃 J：抽象策略

形象策略是要贴近现实、我们的感觉。

而抽象策略反过来，则是要抽离表面因素，提炼纯粹的本质。



抽象策略的守护神，是乔布・布尔。

乔治・布尔是 19 世纪的英国数学家，他堪称是「将思想本身，变成数学」的第一人。

在他之前，代数是用来研究「数」与「量」的。而布尔，提出了一个石破天惊的想法：代数，为什么不能用来研究「思想」和「逻辑」本身呢？

他做的，就是一次终极的「抽象」。

他将我们日常语言中那些复杂的、充满了感情色彩的逻辑判断，「滤去」了所有的具体内容，只提炼出其最纯粹的、非黑即白的内核。

他规定，任何一个命题，无论它多么复杂，其最终的「真值」，都只有两种可能：「真」（用 1 表示）或「假」（用 0 表示）。

他将逻辑关系中的「与」（AND）、「或」（OR）、「非」（NOT），完全等价于代数中的运算。比如，「A 与 B 同时为真」，就等价于 A x B = 1。

这，就是布尔代数的诞生。

布尔的伟大之处在于，他将人类最复杂的思想活动，抽象成了一套可以用 0 和 1 进行运算的、极其简单的符号系统。

这个看似「无用」的、纯粹的抽象游戏，在一个世纪后，成为了整个数字计算机和信息时代的逻辑基石。你每一次在搜索引擎中敲下关键词，每一次计算机执行「如果-那么」的判断，其背后，都是布尔的思想在低语。

回到我们日常的学习。

我们看课本的各种知识，很多都是在抽象。因为本质上数学课本做的一个核心事情，就是从现实中抽象出本质规律。

你读课本，也就要顺着这条线索去进行提炼抽象。死记硬背没用。

那么如何用抽象思维解题呢？

还是用鸡兔同笼为例。

这道题，我们被鸡和兔子困扰，但是「鸡」和「兔子」真的对解题重要吗？如果换成「鸭子」和「猪」题目会有差异吗？

并没有。

那么既然如此，「鸡」和「兔子」只是一个表述，真正的问题在于更高层次的抽象关系。

那么我们能否抽象到更高层次，摆脱形象的干扰来解决问题呢？

我们可以使用通用的数学符号（如变量 x 和 y）来代表它们的数量，然后用严谨的数学方程式来描述它们之间的关系。这是一种将具体问题升维到纯粹符号世界的路径。

这个大家都会，我不列方程了。

黑桃 10：转化策略

转化策略的方向包括：转化事物、转化概念、转化方向、转化视角。

其核心，是通过转化来简化问题，从而高效处理。

转化策略的守护神，是约翰・纳皮尔。

约翰・纳皮尔是 16 世纪的苏格兰数学家。在那个「大航海时代」，天文学家、航海家和工程师们，每天都面临着一个巨大的、令人头痛的敌人——繁琐的计算。

尤其是涉及到超大数字的乘法、除法和开方运算，不仅耗时极长，而且极易出错。一个微小的计算失误，就可能导致一艘船偏离航线几百公里。

纳皮尔花了二十年的时间，去思考一个革命性的问题：

> 有没有一种魔法，可以将复杂的『乘除』运算，『转化』成简单的『加减』运算？

他发明了一套全新的数学工具——「对数」（Logarithm）。

对数的神奇之处，就在于它真的实现了那种「魔法」般的转化：

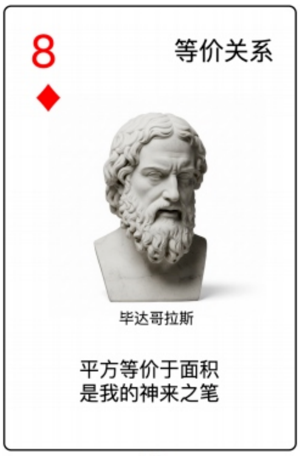
- log(A × B) 等价于 log(A) + log(B)
- log(A ÷ B) 等价于 log(A) - log(B)

这意味着，任何两个大数的乘法，都可以被转化为「查对数表，然后做一次简单的加法」。

纳皮尔的这项发明，被誉为「将天文学家的寿命延长了一倍」。它将无数的科学家和工程师，从计算的地狱中解放了出来，极大地推动了科学革命的进程。

当你觉得眼前的道路无比艰难时，不要硬闯。试着去寻找一条平行的、更简单的「等价」路径，然后优雅地「转化」过去。

转化策略，往往是基于对「等价关系」线索的发现。



例如纳皮尔，他用对数把乘除运算转化为加减运算，利用的是乘除法到加减法的等价性。

而前面我们谈到的毕达哥拉斯定理的证明，利用的是面积和乘法的等价性。

在介绍毕达哥拉斯定理的证明思路之后，我留了一个问题：

> 能否参考毕达哥拉斯定理证明思路，来解决鸡兔同笼问题呢？

那我们来看看，这个思路是怎样的。

我们看鸡兔同笼这道题。

鸡兔同笼，共 38 个头，112 只脚，那么鸡有多少只？兔有多少只？

从 38 个头，我们可以很快理解到，鸡兔一共 38 只。因为两者都是一个头。

迷雾在于鸡和兔的数量未知、而两者脚数量不一样。

鸡有两只脚、兔有四只脚。

那么这个能观察出什么呢？

一只兔子的脚数量，是鸡的两倍。

前面我们谈高斯的案例，高斯观察到数列前后的对称性，快速解出了 1+2+3⋯+n 的和。

高手有一种特征和敏感，就是善于在复杂问题中，观察出相对简单、特殊的特征，然后尝试作为突破口。

那么「兔脚是鸡数量的两倍」，是不是可以做文章呢？

回到我们「转化思路」，这个可以如何转化呢？

我们进一步观察兔脚和鸡脚，4 和 2。

4 很有意思，它是一个完全平方数。

完全平方数有什么几何意义呢？正方形面积。

2x2 的正方形的面积。

那么 2 代表什么呢？

2x1 的长方形面积。

两个长方形拼起来就成了正方形。

联想：经典的勾股定理的证明，$a^2 + b^2 = c^2$，一种思路就是转化为面积求证。

那么我们是否可以这个脚数转化为面积，这样应该会产生新的题目。

而长方形和正方形，貌似要比鸡兔同笼直观很多。

从这个思路，我们可以产生一道等价的题目：

长方形和正方形一共 38 个，长方形是 1x2，正方形是 2x2，总面积为 112，请问有多少长方形、多少正方形。

这个我们设定都是正方形，那么 112/4=28 个。

但是一共是 38 个，为什么呢？一些正方形分成长方形了呗。

每把一个正方形拆成长方形，面积保持不变，但是会多一个图形。

从 28 到 38，意味着拆了 10 个正方形。

所以就是 20 个长方形。

还有 18 个正方形。

好啦，这道等价的求图形个数的题目，算起来就直观多了。

这样，我们抓住 4/2 倍数关系，进一步观察发现 4 的完全平方数性质，从这方面入手（可能联系到勾股定理证明来强化我们的方向思路，当然也可能联想到其它题目，或者没有联想直接干），把「脚的数量」转化成了「图形面积」，把「求动物个数」转化成「求图形个数」，用更直观的方式解决了问题。

顶级高手的特征：跨领域的举一反三融会贯通

这个「把鸡兔同笼转化为几何问题」的解法，是一个大范围跨领域的迁移。

我们把算术问题转化成了几何问题，这是一个大范围迁移。

我们联想到勾股定理的求面积解法，把勾股定理的证明思路迁移到鸡兔同笼这个看上去风牛马不相及的题目上，这也是大范围迁移。

这是一种顶级高手的能力，掌握底层逻辑之后实现跨领域迁移。

这也是为什么高手往往不用刷题型，就很厉害。

没有这种题型的经验，他们可以用你看上去截然不相关的题目中获得的经验来触类旁通。非常善于转化，把一个问题转化为另一个问题，从一个视角转化到另一个视角。

乔布斯说：

> 创造力只不过是把事物关联在一起而已。如果你问有创造力的人是怎么做出东西来的，如何做成某件事的时候，他们会有一点愧疚。因为他们并没有真正「做」东西，他们只是能「看到」东西。一段时间之后怎么做就会变得非常明显。这是因为他们能把自己的经验和新东西综合起来。因为他们拥有比别人更多的经验，他们对自己的经验想的更多。

但是「题型专家」就不行了。

因为题型专家，总结题型就是靠「表面现象」，例如题目条件的类型、应用模型等等，而并不关注「底层关系和逻辑」。

我上次看到一位家长帮孩子梳理「植树类问题」，从三种基本情况「两边都植树、一边植树、两边都不植」，拓展出 10 多种变型。

归纳很详细，每种都要做例题。

小朋友也真做了。

妈呀，解题不是这样靠归纳法详细到脚趾头的，这样累死了。

而且家长干了很多活，小朋友也辛苦。

这一章要归纳，下一章还要归纳，要做那么多题。

这是一条苦逼的道路。

不要吃苦，要享福。

死记硬背本来就没把研究和创造力当回事，总想套现象。

表面现象是没办法跨范围迁移的。

只有底层逻辑才是通用的。

所以高手掌握「简化的底层逻辑」，灵活的应用到各个领域；菜鸟刷了无数题，成为了众多「表面题型」的专家，还是很菜。

还有，菜鸟刷题题型都是基于「应试」的，所以离开应试往往毛用都没有；但是「化繁为简」的底层逻辑不光是数学通用、物理通用，对工作和人生往往也是通用的。

这样，以不变应万变，庖丁解牛游刃有余。

黑桃 9: 创新策略

创新策略，就要设定新规则、新标准。

我们继续看鸡兔同笼这道题。

鸡兔同笼，共 38 个头，112 只脚，那么鸡有多少只？兔有多少只？

让我们先回到复杂性「又有鸡又有兔子，数量都未知，脚数不一样，比较复杂」。

那么，我们能否设定新的规则，实现简化呢？

脚数不一样，能否让脚数一样呢？

什么情况脚数才能一样？

一种情况是：「鸡兔是配对的」，这样一对总是 6 只脚。

这个思路好像有点意思，顺着思考，如果这样的话，最终就是两组动物：

1）配对的鸡兔

2）落单的鸡或者兔子

那么落单的是鸡还是兔子呢？还不知道。

如果正好 38 只配对的话，那么就是 19 对，每队 6 脚，就是 114 脚。

哎呀，但是题目是 112 脚，这个很接近了，但是差了 2 只。

很接近了，说明没有完全配对，但很近了，应该是 18 对，用 18 套进去，算一下还有两只兔子，验算正确。

这样通过设定新的规则，简化问题看到真相。

顶级的高手，深刻掌握了简化的底层逻辑

回到前面我们谈到的「求真 5 星旗」（5 大减缓策略）：

起源	**策略**	**核心定义**
适应世界	**演化策略**	通过从最简单、最特殊的案例入手，遵循事物演化规律，逐步推演。
感受世界	**形象策略**	通过图形、空间、比喻和物理直觉等形象化方式感受事物。
理解世界	**抽象策略**	通过符号、规则、原理、模型和公理等抽象方式来理解事物。
连接世界	**转化策略**	转化事物、转化概念、转化方向、转化视角
改变世界	**创新策略**	设定新的规则、标准，创造新的事物和场景

我用鸡兔同笼的案例，给大家演示了如何从这 5 种策略出发，分别产生一种解题思路。

而真正解题的过程中，这些策略往往又会组合使用。例如转化策略的「转化为面积」，其实也是「形象策略」的体现，同时也是抽象策略的体现（因为脱离了鸡兔的表象，抽象了实质的数量关系）。

顶尖的高手，非常擅长用这 5 种策略去分析和处理问题，尽管他们往往是无意识的。

通过有意识的训练，你可以高效的来提升自己的简化能力，成为「化复杂为简单」的高手。

接下来的黑桃牌 8-2，是更具体落实这 5 大简化策略的重要战术武器。

- ♠8: 数形结合
- ♠7: 分而治之
- ♠6: 升维打击
- ♠5: 构造法
- ♠4: 等价变形
- ♠3: 反证法
- ♠2: 倒推法

黑桃 8: 数形结合

数形结合是数学中非常重要的一种策略。

本书中已经大量篇幅和它相关。

它其实是形象策略、抽象策略、转化策略的进一步落实。

「形象策略、抽象策略、转化策略」，都是通用智慧，跨领域的。

而数形结合，则是把「通用智慧的策略原则，和数学领域的具体特征结合」。

在层次上低一些。

数形结合的守护神是华罗庚，他讲过一句著名的话：

> 数形结合千般好，隔裂分家万事休

真的如此。

大家数学学习要形成本能，遇到数去思考寻找它的形，遇到形思考寻找它的数（代数）。

鉴于本书一堆案例都和它相关，不再举例。

黑桃 7: 分而治之

分而治之是一个非常常用的策略。

当问题比较复杂，我们就分解为更小的问题，然后逐个击破。

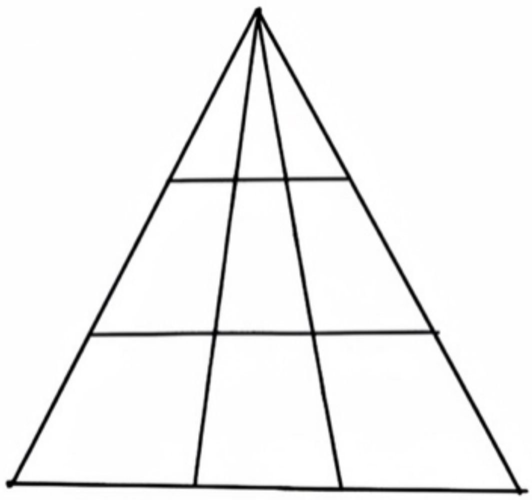
这也是一种演化策略的思路。

分类讨论就是在分而治之。

分而治之一个难点在于，如何有效的分类或者拆解，让拆解出来的问题结构本身容易被处理、简单。

这很大程度跟观察判断有关系。

例如在方块中「有序性」谈到的数三角形个数的例子：



重点是找到/创造一个有序的结构，这个结构本身就容易让我们逐步分情况数清楚。

关于分而治之执行本身，更多的是严谨细致。

不多谈了。

黑桃 6: 升维打击

升维打击是一种非常重要、反常规的思路。

属于创新策略的一种思路。

它的核心思想是：

> 如果你难以解决一个问题，那么去解决比它更普遍、更高层、更深刻、往往看上去也更困难的问题。解决了更大问题之后，手头问题自然迎刃而解。

它的反常识在于，我们遇到了难题，通常思路是一步一步来，从更小的研究。

而这个则是「干脆干一票更大的，顺便就把手头的搞定了」。

举个例子，假设我们要解$2x^2 + 8x + 5 = 0$，我们不会解。

那怎么办呢？

升维打击思路就是，我们能否找到 $ax^2 + bx + c = 0$的通用解法呢？如果找到了，自然我们就把手头的问题解决了。

这样看，也不是那么不可思议是吧。

为了把醋给用了，那就包个饺子。

为了吃口热饭，干脆就发明个微波炉。

在理科思维扑克中，「升维打击」是黑桃 6，它的守护神，正是这种「微波炉思想」的终极大师——黎曼。

黎曼之前的数学家，包括他的老师高斯，都在研究我们能看见的、三维空间里的二维曲面（比如球面、马鞍面）。这是一个复杂的问题。

但黎曼的反常规之处在于，他没有去解决这个或那个具体的曲面问题。他问了一个更疯狂的问题：「我们能不能创造一种，可以在任意维度（四维、五维、甚至 N 维）空间里，都普遍适用的几何学？」

他要解决的，是一个比所有人都更普遍、更高层、也更困难的问题。最终，他成功创造了「黎曼几何」。

这套理论，在当时就像一把过于超前的屠龙刀，看上去厉害，但是没龙可杀。

半个多世纪后，爱因斯坦在创立广义相对论时，苦于无法用数学描述弯曲的「四维时空」，才发现，黎曼炼的屠龙刀真棒，他的感觉就跟孙悟空拿到金箍棒一样「终于有了个趁手的兵器」，然后打出了惊天一击。

这就是「升维打击」的威力。当你被眼前的难题困住时，不妨抬起头，去思考一下：有没有一个更大的、更普遍的问题，一旦解决了它，眼前这个小麻烦，就会自动烟消云散？

对于同学而言，我觉得最需要升维打击的，是刷题问题。

今天大家普遍刷题，大家想要解决的，是「刷题效率问题」：

我能不能刷题更高效一些，正确率高一些，错误订正更精确一些。

如果你用「升维打击」的思路，那就是：

我能不能不刷题不内卷，就击败那些卷王

有这个思路，才是对的。

我们这本书，也就是为你「升维打击」奠基的。

黑桃 5：构造法

构造法是转化/创新策略的一种常见方法。

中国建设时期，大庆油田的铁人王进喜说过一句话：「有条件要上，没有条件创造条件也要上」。

这句话就是构造法的精髓。

没有条件就创造条件。

本书中好几个案例，就涉及到了构造法。

例如泰勒斯测量金字塔高度，他构造了一个场景：在日照的时候（产生影子），自己走来走去，这样把自己当一条边，影子当一条边，构造一个和金字塔的相似三角形。甚至还可以选择自己的影子和身高相等的时候（构造出等腰三角形），避免比例转化，简化计算。

构造法的经典。

而黎曼发明黎曼几何，从他要解决的原始问题角度（二维曲面问题），也是一种构造，只是他构造了更大的问题和解决方案，进而以此为基础解决原始问题。

我们前面用「面积转化」解决鸡兔同笼，也是构造，构造了一个等价的图形问题，来解决鸡兔同笼问题。

在扑克中，构造法的守护神是刘徽。

刘徽是中国古代最伟大的数学家之一，他为经典数学著作《九章算术》所作的注，本身就是一部充满原创性思想的杰作。

其中，最能体现他「构造法」与「演化策略」完美结合的，莫过于他计算圆周率的「割圆术」。

在刘徽的时代，计算一个圆的周长和面积，是一个巨大的难题，因为圆是曲的，而当时所有的测量工具，都是直的。

面对这个曲直之争的难题，刘徽的思路，正是「没有条件，创造条件也要上」。他的核心思想是：

> 我虽然无法直接测量圆，但我可以构造一个与它极其相似、且我完全可以计算的多边形，用这个直的、可计算的图形，去无限逼近那个曲的、不可计算的圆。

接下来，刘徽做出了一个天才的、堪称「神级简化」的选择：他没有从正方形（四边形）或正三角形开始，而是选择了从「圆的内接正六边形」开始他的构造之旅。

为什么是正六边形？

因为在一个圆里，正六边形的边长，恰好就等于这个圆的半径！

这个选择，是一个极其优雅的「构造」。它让整个计算的初始条件，变得无比简单和明晰，完全避免了复杂的开方运算。

接下来，就是「演化」的登场。

刘徽想：

- 我已经有了 6 边形，不够精确。
- 我能否在 6 边形的基础上，构造出 12 边形？
- 在 12 边形的基础上，再构造出 24 边形？
- 再到 48 边形、96 边形、192 边形……

他通过一系列精妙的几何构造（添加辅助线、利用勾股定理），成功地找到了一个可以无限重复的「递归」算法，让他能够从 n 边形的边长，精确地计算出 2n 边形的边长。

他就这样，一步一步地，用更直的边，去「割」圆的弧，让多边形越来越接近圆。最终，他计算到了 3072 边形，得到了圆周率约等于 3.1416 的、在当时堪称世界之巅的精确结果。

刘徽的「割圆术」，是「构造法」的经典。当面对一个无法直接下手的难题时，高手会像一个棋手一样，主动地去「做棋」——构造一个极其有利的「初始局面」（正六边形），然后找到一个可以「演化」的制胜规则，最终将看似无法战胜的「神龙」（圆），分解为无数可以被轻松斩杀的「小蛇」（直角三角形）。

我们再来看这句话：「有条件要上，没有条件创造条件也要上」，这是强烈的进取心、创新精神，同时也是科学思想（没有条件要先创造条件）。

那么应试学习是什么呢？没有条件也要上，硬干。

蛮干精神。

违反科学原则。

所以失败是必然而长久的，成功是侥幸而短暂的。

黑桃 4: 等价变形

等价变形是实现转化的基本手段。

这张牌的守护神，是韦达。

弗朗索瓦 • 韦达是 16 世纪的法国数学家，被誉为「符号代数之父」。他的贡献，可以说是为整个现代数学，提供了最基础的「操作系统」。

今天我们能够简洁快速的进行代数等价变形，也是他的贡献。

在韦达之前，代数学很大程度上是「文字代数」。解方程，就像在写一篇冗长的说明文。 比如，一个二次方程，可能会被当时的人描述成：「一个数，它的平方的三倍，加上它本身的四倍，等于五。求这个数。」

这种写法，不仅繁琐、低效，更致命的是，它让数学家无法对问题本身，进行灵活的、结构性的「变形」。

韦达的革命性贡献在于，他第一个系统性地、有意识地使用字母，来同时代表「未知数」（比如用元音字母 A, E, I, O, U）和「已知数」（比如用辅音字母 B, C, D）。

这个看似简单的改变，却是一次石破天惊的「升维打击」。它将代数，从具体的、一次性的「算术求解」，解放到了抽象的、普适的「符号游戏」之中。

正是因为有了这套符号系统，数学家们才第一次，可以像操纵「乐高积木」一样，对一个方程，进行各种纯粹形式上的「等价变形」，而不用去管它背后具体的数字和意义。

而「韦达定理」，正是这种「等价变形」思想的巅峰之作。

「韦达定理」的产物「二次求根公式」，核心是：

对于二次方程：$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

其求根公式为: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

这个定理的威力在于，它让我们可以「直接套用公式求解任何二次方程的根，彻底简化了二次方程求解」。

韦达，为我们提供了「变形」的工具（符号代数），又用他最著名的定理，展示了「变形」的威力。 他告诉我们，「等价变形」这把武器的精髓，就是：通过形式上的巧妙变化，达成实质上的惊人简化。

不仅要知道等价变形，更要知道为什么做等价变形

大多数同学遇到难题，就容易「没见过、没思路」。

做不出来正常，做出来也是碰运气。

然而高手，面对这种情况，还是会去探索寻找思路。

其实很多时候，问题反过来就是方向。

例如：「没见过」，那么你见过什么呢？

以二次求根公式为例。

大多数同学怎么学习这个知识点的呢？

老师讲二次求根公式是$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，跟大家说这个公式很重要，是考点。

学渣同学们哗啦哗啦记笔记，把求根公式给抄一遍在笔记本上。

然后就开始做题，刷一啪啦的题目，就是套这个公式求解各种二次方程。

这就是直接从老师那里接收灌输拿到结论，然后开用。

学霸会跟着老师或者下来自己把求根公式推导一遍，基于配方法，然后得出结论，接下来就开始大量刷结论解方程。

这样其实还是局限在这个知识点的层次，局部的学习和理解知识。

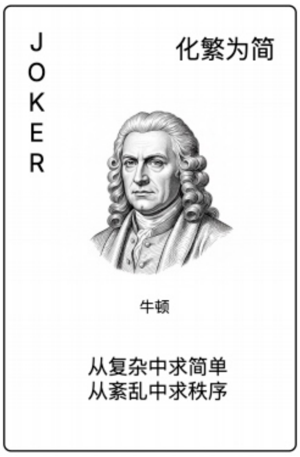
而顶尖选手基于深度研究的思路，会不一样。

单纯从这个二次求根公式的角度，他们会有更深入的问题，会去研究思考原因。例如：

为什么要用配方法呢？怎么想到用配方法来求解二次方程的呢？

我们解题有一个基本原则：简化原则。就是把复杂的、未知的，简化为简单的、已知的。

这是我们的理科宪法第二条。



那么我们看二次方程$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$，这个在当时学习时是一个新问题。

我们没见过，不知道该怎么做。

这时候怎么办呢？尝试简化。

如何简化我们才会做呢？

二次方程不会解决，但是一次方程我们当时已经学过了，例如：$ax+b=0$这种通用一次方程，我们是会解决的。

那么，如果我们能把二次方程的求解问题，简化（转化）为一次方程的求解问题，不就能做了吗？

那么继续思考，具体怎么转化/简化呢？

暂时没有特别好的思路（你假设自己没看过答案）。

观察这个方程式$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$，我们一时想不到方法，那就尝试把这个方程式简化成更特殊形式看看。如果我们设 b=0，也就是去掉 bx 项了，那就有$ax^2+c=0 \quad (a\neq 0)$。

哎呀，这个我们能转化成一次方程吗？

可以，无非就是$x^2+a=0$

移项之后变成$x^2=-a$

这样就可以通过开方来把二次方程转化为一次方程拿到解了。

其实到这里，也就是有了一个最简单的二次方程形式：$x^2=m$

对这种特殊形式的，没有一次项的二次方程，我们可以求解了。

那么接下来问题就是，如何能够把更普遍的二次方程$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$，转化为类似于$x^2=m$的形式呢？

把二次方程化为$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad (a\neq 0)$，基于前面的研究，我们核心是怎么把这个一次项给去掉。

这里就用了配方法，基于完全平方公式去掉了一次项，最终得到类似于$x^2 = m$的形式，产生了最终的结论，也就是二次求根公式。

这样，我们搞清楚了二次求根公式怎么来的。

学到了配方法。

了解了完全平方公式的一个相关应用，就是配方法。

了解了配方法的一个重要用途，那就是用来去掉二次式中的一次项，从而把二次式变成更简单的形式。

通过简化思维重新推导求解了二次根式。

而在知识体系推导演化角度，此前我们的知识点在一次方程以及求解公式，而现在基于简化思维，我们基于「一次方程求解」、「二次方程的代数表示」、「完全平方公式」这些前置知识点，围绕「二次方程求解」这个问题的推导，进一步演化产生了二次方程求根公式，以及相关的「配方法」。

这样知识体系也就拓展了。

作为新知识的「二次求根公式」，是这样在已有知识基础上逻辑推导出来的。

而且这个过程，还把诸如完全平方公式这样的知识点重新复习了一遍，加深了认识。

理解了这个逻辑，其实并不需要可以记忆。

忘记了再推一遍就很快了。

同时还把推导思路给复习了一遍。

而大多数同学则是记忆一个结论，不熟悉再次背诵一遍。

这个就完全不一样的逻辑了。

他们的结论，是搬过来套用的。

他们的知识推导过程，要么根本没做，要么就是简单的照着解一遍，没有真正思考为什么会这样去推导求解。

所以都是复制粘贴。

这样，一方面知识欠债，掌握不够深刻。

一方面智力欠债，因为缺乏研究分析深入推理。

还有解题思路方法也欠债了，因为哪怕是照着做了一遍，也没去思考「这个思路怎么出来的，为什么在这个步骤要这样求解」，这种背后的为什么，才是解决思维更灵活题目的关键。

很多同学看到比较考思维的题目，就无从下手，一看答案又觉得会做了，「一做就懵一讲就懂」。

一个原因，就是缺少这种日常去研究分析「这题为什么会这样做」的经验，去搞清楚问题的复杂性和简化策略，无脑搬运解法。

所以从这个案例，其实你真正把课本搞懂了，无论是基础知识，还是解题思路，都差不多了。

已经是一流水平。

黑桃三：反证法

反证法是一种非常巧妙的方法。

可以算是转化策略的一种应用。

但是这个转化，是先转化到目标的反面，但最后又转回来。

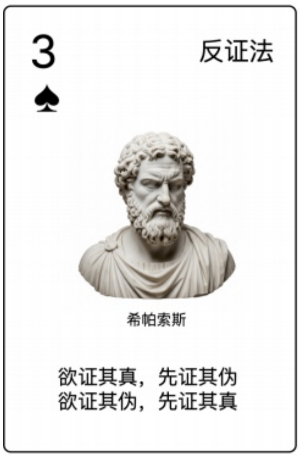
概要的说：

- 欲证其真，先证其伪
- 欲证其伪，先证其真

带有浓厚的辩证思维特点。

反证法的故事，也带有传奇色彩。

它有史记载的第一次登场，就引发了惊天危机。



而这个危机的源头，还要说到毕达哥拉斯定理的证明，以及毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯诞生于靠近小亚细亚海岸的萨摩斯岛。在四处游学之后，他成立了一个兼具宗教、科学、哲学性质的帮派，也就是毕达哥拉斯学派。

这个学派有人员的限制，内部传授知识，并且对外保密。

毕达哥拉学派有一个基本信仰：万物皆数。他们相信数代表了真理，可以解释万物。

可能他们的信仰，更进一步。亚里斯多德说，毕达哥拉斯学派，把数看做真实物质世界的最终组成部分（类似于今天科学中的原子概念了）。

在那个时代，人们认识的数，是像 1、2、3 这种我们日常经验可以感知的数，也就是整数（严格的说正整数）。

所以毕达哥拉斯学派认为，任何事物，都可以表达为整数，或者整数的比。

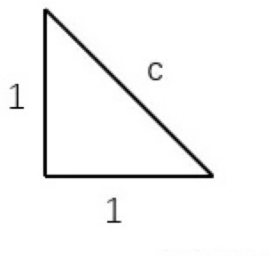
数学证明引发的谋杀案

在证明了毕达哥拉斯定理之后，传说毕达哥拉斯学派欣喜若狂，杀了 100 头牛祭祀庆祝。

然而，好景不长。这个定理的证明，对于毕达哥拉斯学派而言，如同打开了潘多拉的魔盒。它释放出了一个幽灵。

这个幽灵是什么呢？

如果我们做一个直角边长为 1 的等腰直角三角形。



那么根据毕达哥拉斯定理，有$1^2+1^2=c^2$

化简之后可得$c^2=2$。

前面我们谈到，毕达哥拉斯学派信仰「万物皆数」。他们认为，任何事物，都可以表达为整数，或者整数的比。

首先，c 不是一个整数（1 之后的最小整数是 2，而 c 大于 1 小于 2）。

那么，按照毕达哥斯拉的理念，c 应该可以表达为两个整数之比。

然而，在毕达哥拉斯学派中，有一个人叫做希帕索斯。他证明，这个 c 不能表达为整数之比。

他是如何证明的呢？

反证法的应用

希帕索斯使用了反证法。

他首先假设，c 能够表达为两个整数之比，也就是假设$c=p/q$（这里p、q互质，否则还是可以化简得到一个互质的p、q形式）。

这样一来，$(p/q)^2=2$，化简之后得到$p^2=2q^2$。

因为p、q互质，那么p、q最多只能有一个偶数（否则还可以继续化简）。

又因为$p^2 = 2q^2$，也就是说p^2必然是偶数，那么p必然是偶数。

这样一来，q就必然是奇数。

既然q是奇数，等式的右边$2q^2$，一共就只有一个 2 的因子。

然而，在等式的左边，因为p是偶数，那么p至少有一个 2 的因子。p^2至少有两个 2 的因子。

这样一来，等式左边和右边不能相等。

因此，我们最开始的假设（c 能够表达为两个整数之比）是错误的，c 不能表达为两个整数之比。

这是一个非常漂亮的证明。希帕索斯使用的，是一些基本的整数和运算性质，例如奇偶性、整数的因数。反证法的应用很精彩。

有哲学思辨的美妙。

狂热的信仰

希帕索斯的证明非常漂亮，无懈可击。

然而这个证明，直接跟毕达哥拉斯学派的基本理念相冲突。

毕达哥拉斯学派信仰「万物皆数」。他们认为，数字代表了真理，任何事物，都可以表达为整数，或者整数的比。

今天，居然有了既不是整数，也不能表达为整数的比的长度。那么，「万物皆数」就站不住脚了。

从数学史的角度，这件事情称为第一次数学危机。

如果单纯从科学研究的观点，站不住脚是好事，证明理论研究有了新方向、新突破。承认问题，继续研究就行了呗。

但是如果从宗教信仰的角度，那就不一样了，「神」不灵了，世界崩溃了。

那怎么办呢？不能解决问题，但是可以解决提出问题的人啊。

于是希帕索斯被扔到海里喂鱼了。

可比数 vs 不可比数

尽管希帕索斯成了倒霉蛋，但他所发现的事实，依然存在。

这就导致了新的概念的产生，希腊人现在意识到，不是所有事物，都可以表达为两个整数之比的。

于是，希腊人有了「可比」（也翻译为「可公度」，和「不可比」（不可公度）的概念。

在希腊文中，希腊人用「λογος」，表示「可比之数」。而这个翻译到英文，比例的词根是 ratio，可比之数也就翻译成了 rational number，不可比之数则翻译成了 irrational number。

从直观容易理解的角度，其实有理数更浅显的翻译，应该是「比数」。而无理数，则是「不可比数」或者「非比数」。例如$c^2 = 2$，这个 c 就是不可比的数。

从另外一方面，rational 和 irrational，本来也就是「理性」和「非理性」的意思。

毕达哥拉斯学派，学习数学是为了追求理性（虽然矛盾的他们又有对数的强烈的带有宗教性质的迷信色彩），他们认为数就代表了理性、能解释万物运作，所有事物都可以表达为整数和整数之比。

理解了在他们心目中，数与理性的关系，那么对有理数和无理数的概念，也就容易掌握。

儿子生爸爸

有个笑话说，妈妈问儿子，是爸爸大还是儿子大。

儿子说：一样大。

妈妈问为什么啊。

儿子说，因为生了我，爸爸才当爸爸的。

看上去是笑话，但背后却有一个道理。固然从生物体的角度，是现有爸爸这个人，再有儿子。

但从概念的角度，「爸爸」这个概念，却要从属于「儿子」这个概念。没有「儿子」，就没有「爸爸」。

如果脱离了「儿子」的概念，单纯讲「爸爸」，在现实生活中，我们一定觉得很荒谬。

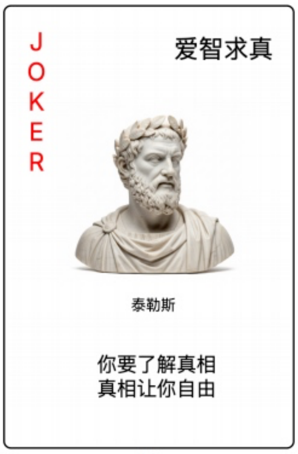
但是在数学教课书里，这种逻辑上的脱节却是普遍的。用人教版初中数学教材为例，初一上引入「有理数」的概念，说「整数和分数统称有理数」。初一下又跳出无理数的概念。

然而从逻辑上，这两个概念是配套的。正因为发现了不可比的数，才需要一个「可比数」的概念来区分。否则就像希腊人之前那样，没有发现不可比的数，也就没必要叫「可比数」。本来数都是可比的，那还要这个概念干嘛。

教材把概念都搞得支离破碎，就难怪学生普遍缺乏对概念的理解了。

反过来，这也是为什么，你需要溯本求源，回到概念产生的原始现场。

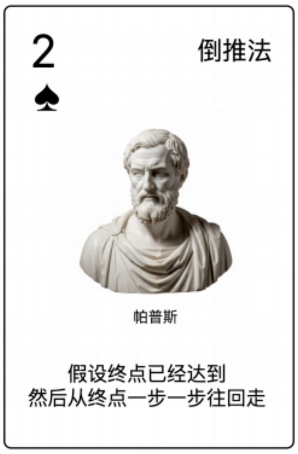
这也是「爱智求真」，要探索概念的真相。



黑桃 2: 倒推法

前面的反证法，是基于逆向思维的方法。

而倒推法，也是基于逆向思维。



倒推法的守护神，是帕普斯。

亚历山大的帕普斯，是生活在公元 4 世纪的、古希腊数学「黄金时代」最后一位伟大的几何学家。

他所处的时代，是一个创造力开始衰退，而更注重整理、注释和传承前人智慧的时代。帕普斯最伟大的著作《数学汇编》，就像一部「古希腊数学的百科全书」，为我们保存了大量已经失传的珍贵思想。

在这部巨著中，帕普斯做了一件极其重要、也极具开创性的事情：他第一次，系统性地、理论化地，为数学家们解决难题时的「思考过程」，进行了「立法」。

他将一个完整的解题过程，清晰地分为了两个方向完全相反的步骤：

第一步：「分析法」—— 这，就是「倒推法」的灵魂。

帕普斯这样定义它：

「我们假设问题已经被解决（所求已得），并顺着这个已解决的状态，一步步地逆向推导，看看它会引出哪些我们已知的、更简单的结论或前提。」

这就像一个侦探，拿到了最终的「犯罪现场」（已解决的状态），然后开始「时光倒流」，一步步地回溯，最终找到那个最初的「犯罪动机」（已知的前提）。

第二步：「综合法」 —— 也就是我们熟悉的正向推导。

帕普斯接着说，在我们通过「分析法」找到了那条从「终点」到「起点」的秘密路径之后，我们就可以反过来，从那个「已知的起点」出发，沿着刚才找到的路径，一步步地正向构建出我们的证明，最终充满信心地抵达那个「未知的终点」。

帕普斯的伟大之处在于，他将数学家们头脑中那些「不可言说」的、模糊的「逆向思考」直觉，第一次用清晰的语言，数理成了一套「标准作业流程」。

他告诉我们，「倒推」，不是一种碰运气的「奇技淫巧」，而是一种与「正向思维」同样重要、甚至在「探索未知」时更为根本的科学方法。当你正向的路走不通时，不妨试试，从终点出发，倒着走回来。

综合运用顺推和倒推，是求知和解题的基本能力。

总结：谋略智慧与谋略能力

总结一下我们的黑桃（谋略智慧），黑桃牌可以分为 3 个层次：

第一层：最高统帅

- ♠A: 简化的 5 大策略

它提出了「化繁为简」的五条核心战略路径，是所有策略的总纲。

第二层：五大核心战略

- ♠K: 演化策略
- ♠Q: 形象策略
- ♠J: 抽象策略
- ♠10: 转化策略
- ♠9: 创新策略

这五张牌，是我们为「化繁为简」这个宪法第二条，配备的五支「主力军团」。

第三层：具体的战术武器

- ♠8: 数形结合
- ♠7: 分而治之
- ♠6: 升维打击
- ♠5: 构造法
- ♠4: 等价变形
- ♠3: 反证法
- ♠2: 倒推法

这些牌，则是更具体的、在不同战场上落实五大战略的「特种兵器」。

从能力角度，黑桃代表谋略能力。

很多同学看到问题就「束手无策」，「策」就是策略，这就是谋略能力的低下。

掌握这些谋略智慧，在前面「表达智慧」（红桃）和「观察智慧」（方块）的支持下，会让你成为真正的谋略高手。

从另外一个层面，我们讲一个人「足智多谋」（羽扇纶巾诸葛亮）。黑桃策略牌主要关注「多谋」，而即将登场的梅花哲思牌，则更关注底层的「足智」。

这两者，相辅相成。

第五章：梅花（哲思智慧）

梅花：哲思智慧与哲思能力

在科幻小说《三体》中，有一段对话：

> 程心问：「那，宇宙战争是什么样呢？」
>
> 关一帆说：「你想象一块被颜料染脏了的画布，怎么才能让它恢复纯白？不是擦掉或洗掉颜料，而是……把画布本身变成纯白。宇宙战争也是这样，最高级的攻击不是摧毁物质实体，比如战舰，而是直接修改你所在的宇宙规律。」
>
> 他继续解释道：「比如，把光速降到每秒十公里，那你所有的战舰都会变成一堆废铁，所有的信息都会被囚禁。或者，把三维空间变成二维，那你的一切都会变成一幅画……这些，就是哲思智慧。在宇宙中，真正的战神，不是挥舞着能量的武夫，而是能修改物理常数的智者。」

这个虽然是科幻，但是「最厉害的武器，是本质规律」这一点，在现实中也成立。

那么如何能够洞察底层规律呢？

它和哲思能力密切相关。

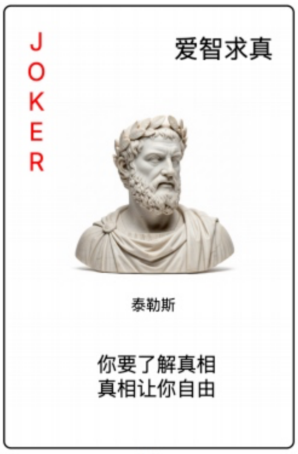
所谓哲思，意思是哲学思考，从根本规律的层面去思考。

有这种「探索根本规律」思想的人，有所谓的「哲学家气质」。

例如任正非，看他的文章讲话就能感受这种气质，关注基本规律和逻辑，视野很大。

我们前面已经讲过，哲学的原意，就是爱智慧。

这也是理科宪法第一条。



很多同学学习困难，就是没有领会这条根本法，甚至和爱智精神背道而驰。

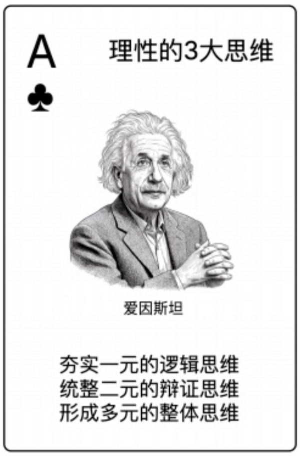
基本理念都不匹配，花再多时间也没大用。

要「志同道合」，这是根本。

我们的梅花牌，也就是关于「哲思智慧与哲思能力」。

梅花 A：理性的 3 大思维

统领规律牌的梅花 A，谈的是理性的 3 种思维。



这 3 大思维是：

- 一元思维：逻辑思维
- 二元思维：辩证思维
- 多元思维：整体思维

一个常见的误区是，把「逻辑思维」等同于「理性思维」。

真正顶尖的理性思考、把握本质的能力，是需要上述三者的共同作用。

我见到一些顶尖高校的同学，他们都是经过严格的筛选进入一流学校的，逻辑思考能力不错。但是缺乏大局观，容易钻牛角尖。

单从他们的那个逻辑链条看，推理链条严谨；但整体思维欠缺，难以把握整体形势，最后还是搞不定。

这背后是整体思维、辩证思维的缺失。

梅花 A 的守护神，是爱因斯坦。他一生的思考轨迹，是这三大思维完美融合的典范。

但是我这里不准备讲爱因斯坦的故事，因为他的研究，整体来说离开我们中小学同学和家长比较远，几段话让大家有体感很难。

关于他的故事市场上很多书籍，大家可以阅读。

从体感的角度，孙子也是一个超级典范，思维能力 3 合 1 的顶级大佬。这个直接从「孙子兵法」就能感受到。

孙子兵法要比相对论对大多数同学容易很多。

推荐大家阅读，不长，人类文明经典，战略学的开山之作，也是最顶尖之作。

首先从逻辑思维上，孙子兵法是非常严谨的，这不光是细节，而是整本书就是一个严密的体系，分为 4 个部分，更像是论文，总体概述然后详细阐述。

这件事情厉害在哪里呢？

孙子是春秋时代的人。

在那个时代，其它的书籍基本上都是「散文集」，就是一堆文章整合起来，每个部分的关系是比较松散的，缺乏严谨的顶层逻辑。

而孙子这本书，独一无二的「顶层逻辑清晰」。

所以后来很多学者认为「孙子兵法」是后人的作品，因为「那个时代大家都是这样的，你独一无二很可能是后人造假」。

然而后来山东银雀山考古发现，打消了这个说法。

逻辑太严谨直接超越时代。

而从辩证思维的角度，孙子兵法全书从头到位，充满辩证，随便举几个例子：

- 善战者，无智名、无勇功（善战 vs 无功）
- 胜兵先胜而后求战，败兵先战而后求胜（胜兵 vs 败兵）
- 知己知彼，百战不殆（知己 vs 知彼）
- 昔之善战者，先为不可胜，以待敌之可胜（不可胜 vs 可胜）

基于这种辩证性，一方面阐述了深刻的洞察，一方面有文字的优美。

思想性和艺术性拉满。

从整体思维的角度：

- 辩证很多时候就是整体思维的体现（例如：知己知彼，构成了一个整体视角）。
- 而他上来就讲兵者国之大事的 5 要素（道、天、地、将、法），对战争艺术的整体视角
- 同时前面所说，整个书的布局也是整体逻辑清晰

整体感鲜明。

一部写于两千五百年前的著作，其一元的逻辑、二元的辩证、多元的整体，在成书时超越了时代，在今天依然超越时代。

我们的同学，最终修炼智慧，也就要修炼这 3 种思维。

梅花 K：整体思维

什么是整体思维呢？

整体思维，如果做形象的比喻，那就是「既见树木，也见森林」。

具体来说，它包含如下的观念、意识：

1）从整体出发的世界观：认为事物之间存在普遍的联系，相互影响，是一个整体。

2）从整体出发的认识观：认为要深刻了解事物，就要从整体的角度出发。一方面要了解事物的内部结构和交互，也就是把研究对象当作一个整体。另一方面，也要把研究对象放到一个更大的全局中，去研究它在全局位置和跟其他元素的关系。

3）从关系切入的研究观：如何能够有效的掌握整体呢？事物间的相互关系，会成为认识、研究切入的突破口，因为有关系才有整体，否则仅仅是碎片。

4）从整体出发的实践观：深刻理解事物是互相影响的，要实现有效的改变，就需要从整体出发把握全局，避免头疼医头脚疼医脚。懂得「不谋全局者，不能谋一地」。

死记硬背天然就违反了整体思维，把知识当成一个个孤立的内容。

而我们的「理科思维扑克」，就是高度的整体思维的产物：

1）我们把理科思维划分为最高原则（大小王）和 4 种花色（4 种智慧、4 大能力）

2）这 4 种智慧 4 大能力，互相协同，服务于最高原则的落实

3）每一种花色由 A 来统领全局看到整体，其它的围绕这个具体花色的全局展开

4）扑克牌贯穿从古代数学到近代数学，小学数学到高中数学的核心，用整体眼光来看待数学思维

5）基于这套扑克牌的实践，从其中找到对应的牌进行学习，也就成为了从思维整体出发的实践

整体思维与攻克难题

要攻克难题，整体思维也是至关重要。

前面在方块部分中曾经谈过两个例子。

第一个是高斯经典的案例。

对于 1+2+3…+50。

为什么高斯能够发现快捷方法。

因为他在「观察整体」。

很多同学上来容易陷入具体条件的细节、求解的细节，而顶尖选手，上来会从整体观察、分析题目。

第二个例子：

小明从 A 地出发，前往 B 地，然后立即沿原路返回 A 地。A、B 两地之间的路线，由一段上坡路、一段平路和一段下坡路三部分组成。 具体路程如下： 去程的上坡路段长：6 公里；去程的平路路段长：3 公里；去程的下坡路段长：4 公里 小明的速度是恒定的： 上坡速度：每小时 3 公里；平路速度：每小时 4 公里；下坡速度：每小时 6 公里 问题：小明整个往返行程的平均速度是多少？

我们首先进行了分析：

1）题目整体特征

题目条件多，变化多（这种特征，很可能是要找到不变）

2）哪些在变化

速度在变、路程在变，还有来回（方向在变）

3）有什么对称性

有来有回、有上坡有下坡 -> 上坡会变成下坡，下坡会变成上坡

4）有什么是不变的（恒定的）

上坡和下坡的总路程会相等，因为来时的上坡会变成去时的下坡，来时的下坡会变成去时的上坡

请注意，这个是「整体思维」的分析视角，它是超越具体条件的，在整体层面对题目进行研判，先从初步的特征开始，进而细化分析变化特征、对称特征和不变性质。

整体全局搞清楚了，后面就很轻松。

这就是「解题中的整体思维」。

越是复杂、困难的题目，整体思维就越重要。

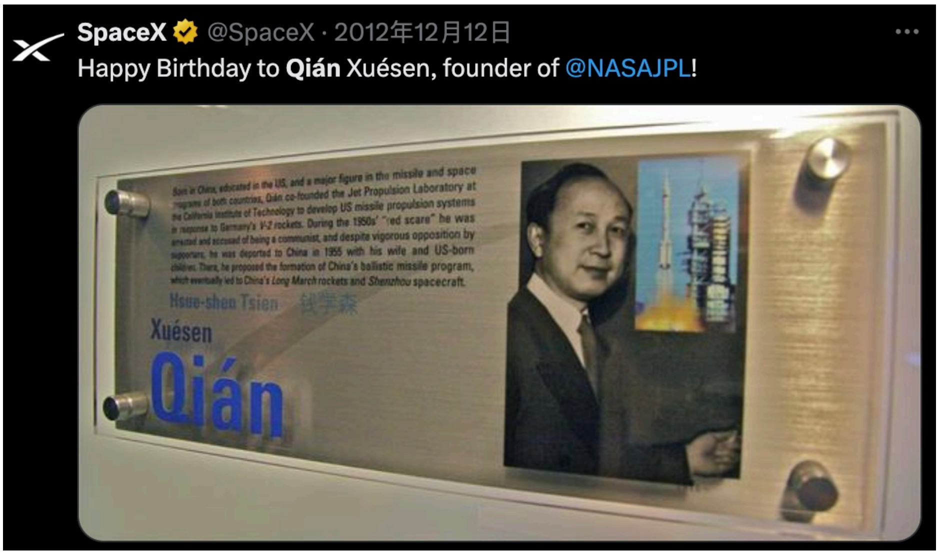
但是在应试学习中，大家往往是遇到难题就找答案抄套路死记硬背，方向都反了。

钱学森与星际旅行

整体思维的守护神，是钱学森。

12 月 11 日，是钱学森的诞辰。

2012 年的这一天，SpaceX 在官方的推特账号上，发布了一条消息，祝钱学森生日快乐。



SpaceX 和钱学森有什么关系呢？

众所周知，钱学森是中国航空航天事业的奠基人，却很少人知道，他也是美国航空航天业的重要奠基人。

在加州理工的时候，钱学森参加了名称为「自杀小组」的 5 人火箭研究俱乐部。这是美国最早研究火箭的小组之一。后来以此为基础，加州理工学院成立了著名的喷气推进实验室（JPL），钱学森正是其核心创始人之一。

这也是 NASA（美国国家航空航天局）的 JPL 实验室前身，后来参加了登月计划。

而在航空方面，1945，欧战结束，美国军队意识到科技会改变战争的未来。于是委托冯卡门（钱学森的导师）所领导的科学咨询团，做一份关于美国战略航空的前瞻性规划。

在二战那个时期，中国和美国是盟国。钱学森作为咨询团重要的科学家，拿到了五角大楼的高安全许可，访问各种机密信息。

最终，科学咨询团给美军提供了一份报告《迈向新高度》。

报告中包含原子弹和原子能技术、洲际导弹、超高速无人驾驶飞机等对未来军事发展的展望与规划。

整个报告有 13 部分，钱学森参与撰写了其中的 5 个部分。

这是美国军方有史以来第一份科学考察报告。

当时美国还没有独立的空军，只有陆军航空兵。这份报告也是美国空军的奠基蓝图，规划展望了美国空军未来几十年的发展方向。

钱学森学习自主性和学习能力超强。

1923-1929 年，钱学森在北京师范大学附属中学读书。当时的校长林砺儒实施了一套提高学生智力为目标的教学方法，启发学生学习的兴趣和自觉性。钱学森回忆，他和同学临考前不开夜车，不死读书，只求真正掌握和理解所学的知识。

在交大，他以机械工程学院第一名毕业。

最早他到美国，就读于麻省理工学院航空系。然而他觉得这里环境不对自己胃口，考虑选择更适合的老师。

1936 年，他开车穿越美国，到了加州理工，没有预约，上门拜访力学泰斗冯卡门，两人交流下来，一见如故。接下来他就转入加州理工航空系，在冯卡门指导下学习。

相比之下，大多数人觉得环境不够，也就随遇而安了。而钱学森，在选择学校和老师上，也表现出来了强烈的主动精神。

普通的学霸或许依赖套路刷题，换个环境就可能水土不服；而像钱学森这样的学神，则更懂得判断和适应形势，总能找到最优解。

钱学森一生，表现出了非常强的灵活性，在不同的环境中都发挥出了顶尖水平。

他曾经为工业世界第一、富裕强大的美国规划航空航天，回到一穷二白工业薄弱的中国，也规划奠基了中国的航空航天产业。

在这两个基础条件截然不同的国家，他都取得了巨大的成功。

这种战略性的规划工作，跨越了科学、技术和工程，跨越了多个学科，不仅仅需要知识的深度，也需要知识的广度，要在高度融汇贯通的基础下卓越创新。

他是一个基础知识渊博通透，同时又有强大的想象力和创造力的人。

1962 年，钱学森写了一本书《星际航行概论》，这是中国第一本高等院校航天专业基础教材。

他在序言中写到：

> 著者试图达到两个目的：第一，想说明实现星际航行的各个技术问题，从而一方面使投入到这些单个问题作研究的科学技术工作者能了解每一个问题在全部工作中的意义；而另一个方面也是要说明星际航行技术的高度综合性，它几乎包括了所有的现代科学技术的最新成就，像近代力学、原子能、特种材料、高能燃料、无线电电子学、计算机技术、自动控制理论、精密机械、太空医学等。
>
> 星际航行的更进一步发展不但将对上述这些科学技术提出新的、更高的要求，而且还会对另外一些直到现在还未发生联系的科学，像植物学、动物学、生物物理、生态学、遗传学、地质学等提出研究课题，使这些学科也得到前所未有的推动力，并向新的方向发展。一句话，星际航行是组织和促进现代科学技术的力量；星际航行可以广泛地带动各门科学前进。

这是非常强的整体思维。

没有渊博的跨学科领域的知识，怎能有如此广阔深远的见解。

他最喜欢讲的两句英文，一句是 Knowledge was boundless（学无止境），一句是 Nothing is final（认知没有终点）。

所以要持续学习、探索真相。

钱学森与系统论

晚年的钱学森，将他一生从造火箭、搞工程中积累的经验，升华到了一门更根本的科学——系统工程。

他意识到，无论是研制一枚复杂的火箭，还是治理一个庞大的国家，其底层逻辑都是相通的：它们都不是由单个零件或部门决定的，而是一个由无数子系统构成的、动态演化的、极其复杂的巨系统。

这个系统的威力，不在于任何一个单一零件有多么出色，而在于所有部分如何协同工作。

他曾用一个生动的比喻来解释这个思想：

「我们搞航天，发射一颗卫星，不是说发动机推力大、控制系统准就一定能成功。燃料供应、箭体结构、测控通信、气象保障……几万个环节，几十万个零件，只要有一个地方出了问题，整个系统就会崩溃。这就是系统工程要解决的问题：如何让所有部分'1-1 > 2'，而不是'1+1 < 2'。」

这种思想，就是整体思维的精髓。他将这种思想，从航天领域，推广到了农业、林业、城市规划乃至整个国家的现代化建设中。

比如，他曾提出著名的「沙产业」理论。面对西北地区的沙漠化问题，传统的思路是「头痛医头」，比如单纯地植树。但钱学森的系统论视角完全不同，他认为：

这是一个「生态-经济-社会」的复合系统：沙漠不只是环境问题，更是经济和民生问题。要变劣势为优势：沙漠日照充足，是巨大的能源宝库。

要建立良性循环：可以利用太阳能发电，用电力抽取地下水，发展耐旱的「知识密集型」农林牧业（如种植甘草、养殖沙鸡），产品加工后又能创造经济价值，反过来支撑生态的进一步改善。

他构建的不是一个简单的「防沙林」，而是一个能够自我造血、持续发展的产业系统。

从规划美国的航空未来，到奠基中国的「两弹一星」，再到为整个国家的发展构建系统蓝图，钱学森的一生，都在践行着梅花 K 的金句：

> 将万物视为彼此关联的系统，从整体的涌现中，寻找最优的航向。

黑桃 Q：辩证思维

辩证思维和整体思维有密切的关系。

要落实整体思维，我们面临的关键挑战，在于世界太复杂，各种影响因素太多。

而我们人类的头脑，并不能同时处理很多相关因素。一多就乱了。

那么到底如何从纷繁复杂的事实现象中，能够抽象把握出世界的本质规律呢？

辩证思维是一个基础、至关重要的武器。

辩证思维的理念，是从整体中抽象出两个核心的对立统一的要素，通过研究分析这两个核心要素，来理解这个整体。

既能简化世界，又能把握关键所在。

辩证思维对于中国人而言，并不陌生。华夏文明带有非常强烈的、朴素辩证思维特征。

群经之首的易经，就是典型的辩证思维驱动。用阴爻和阳爻两个符号，来代表各种对立统一之两要素。

《易传》中说：

> 天行健，君子以自强不息；地势坤，君子以厚德载物。

阳爻代表天，阴爻代表地。天地，就是一组对立统一要素。

《老子》上来就说：

> 道可道，非恒道。名可名，非恒名。

道和名，又是辩证要素。

《孙子兵法》说：

> 夫兵形象水，水之形，避高而趋下；兵之形，避实而击虚；水因地而制流，兵因敌而制胜。故兵无常势，水无常形，能因敌变化而制胜者，谓之神。

我们看这段话里：形与势、虚与实，都是对立统一之辩证元素。

中国文明之优美，其蕴含的辩证因素，是一个重要的部分。从思想上有整体格局，从形式上有优雅感受。

从另外一方面，马克思主义哲学，其中一个部分就是辩证法。

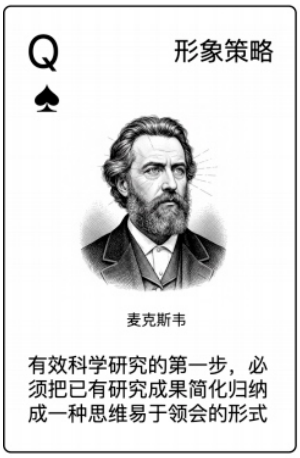
我们看马克思主义相关理论，共产党和政府的文件，你会发现各种各样的对立统一的两个要素。

比如：

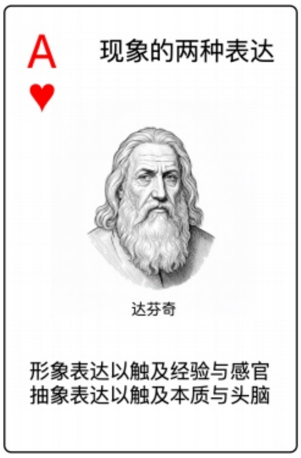
- 生产力与生产关系
- 经济基础与上层建筑
- 主要矛盾与次要矛盾
- 物质文明与精神文明
- 民主与集中

天安门城楼左右的标语，左边是「中国人民大团结万岁」，右边是「世界人民大团结万岁」。中国人民和世界人民，又是一组辩证元素。

在我们的扑克牌中，也存在大量的辩证元素，例如「形象策略与抽象策略」：



而在红桃 A（现象的两种表达）中，形象和抽象在同一张牌上了：



大家可以思考一下：

到目前为止，我们的扑克还有哪些辩证思维强烈的元素？

用辩证思维思考学习和教育问题

如果大家学习努力但效果甚微，那么就需要用辩证思维来思考了。

例如：

1）努力与省力

到底我们是应该追求努力，还是应该追求省力？

貌似菜鸟看上去很努力，反而是高手看上去很省力。

省力才是高水平的证明。

2）成本与收益

努力到底是成本，还是收益？

3）生产力与生产关系

马克思观察人类社会的发展，总结出一个核心视角「生产力与生产关系」。

他认为社会的进步，主要就是看这组辩证元素。

生产力决定生产关系，生产关系反作用于生产力。

那么今天应试教育的生产力和生产关系是什么呢？

应试教育的特征：死记硬背强行灌输反复刷题的生产力，严格管教的生产关系。

这样的生产力和生产关系，是否支持你学习卓越呢？

显然不能。

真正先进的生产力和生产关系是什么呢？

4）主要矛盾与次要矛盾

我们的精力有限，不可能啥都抓、啥都好。

那就要分清主要矛盾和次要矛盾。

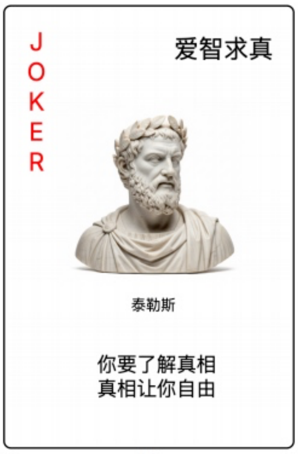
请问：

今天大家在学习中的主要矛盾是什么，次要矛盾是什么？你的精力放在了主要矛盾上吗？

梅花 J：逻辑思维

逻辑这个词（logic），源于希腊文的 logos（逻各斯），logos 指的是内在的规律和本质。

这又跟我们的大王对上号了。



逻辑思维是一元思维，它的核心是寻找建立因果推理链条。

事物间有两种基本的关系：相关性和因果性。

相关性是很宽泛的，只要两个事物有联系，他们就有相关性。

而因果性要严格很多，如果 A 导致 B，我们才认为他们有因果性。

在理论世界中，例如数学，容易有 100%的因果性。而现实世界，很多时候 100%的因果很难，因为影响因素很多。但如果 A 能大概率的导致 B，往往我们也认为是具备因果性。

对我们人类的头脑而言，有意识和潜意识。

潜意识的运作方式，是基于相关性的。例如「一朝被蛇咬，十年怕井绳」。

从因果性角度，你看到井绳根本不应该畏惧。因为这玩意不能来咬你。

为啥我们会有这种反应呢？

因为我们看到井绳，潜意识会联系到蛇的形状（相关性）。而从蛇的形状，有可能联系到被蛇咬过的情感体验，于是畏惧感产生。

在这里，基于相关性的潜意识运作，产生了一个情绪触发。然后我们意识介入，思考分析因果性之后，觉得没啥。

尽管相关性的判断是错误的，但它有一个非常大的优点，那就是相关性判断非常快速，而且节能。

因果性的分析，是人类大脑意识独有的功能，需要高阶逻辑能力的介入。

而逻辑思考功能，运作是非常耗费能量的。我们思考久了很容易累，就是因为太耗能，系统强制要你思考下线。

但是你听八卦可以很久都津津有味对吧，不用动脑。

潜意识的相关性判断，则可以用非常低的能量长期运作。比如你走路看到行人，自然就躲避。完全不用因果分析，直接潜意识完成。

我们看应试教育「死记硬背反复刷题搞熟练」，其实就是从相关性的角度，来进行学习绩效的改进。

你不需要理解，只要看到一道题，本能的产生条件反射，觉得它该怎么做，那就行了。

本质上，走熟练路线，其实你的角色，跟巴甫洛夫的狗没啥差异，就是在做基于熟练度的相关性强化。

但即使单纯从学习绩效的角度，如果知识点越多、关系越复杂、组合可能性越多，训练你产生简单条件反射，那种训练量可能就成指数增长，你就完蛋了。

这是为啥很多同学小学成绩还可以，到中学就不行了；初中还可以，到高中就不行了；高中还可以，到大学就不行了；大学的优等生，出了社会就不行了。

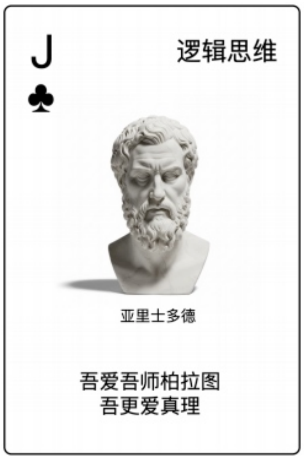
因为往往越到后来，世界的复杂度急剧上升，你靠简单的表面相关性判断，根本就不足以应对。

越复杂的世界，你越需要理解逻辑。

逻辑祖师爷：亚里士多德

谈到逻辑必然要谈到亚里士多德。

他是我们「逻辑」这张牌的守护神。



亚里士多德讲过一句话，说「吾爱吾师柏拉图，吾更爱真理」（大王牌出手）。

基于希腊哲学爱智求真的理念，这句话应该容易理解。

亚里士多德是柏拉图的学生，柏拉图是苏格拉底的学生。

他们三位被称为「雅典三哲」，代表了雅典最辉煌的时代。

顺便说一下，雅典城这个名词，源于智慧女神雅典娜，她是雅典的守护神。

雅典现实中的智慧之神，就是这三位了。

亚里士多德，贯彻了「吾更爱真理」这句话，成为了人类历史上伟大的早期科学家、哲学家。

亚里士多德的研究非常广泛，包括了诸如：

- 自然世界：宇宙、物理、动植物、化学
- 思维世界：逻辑学、形而上学
- 人类社会：伦理学
- 艺术：美学

亚里士多德在上述领域，都做出了巨大的贡献，例如提出了宇宙运动的模型，创作了逻辑学的著述。他的著作加起来，简直就是当年的百科全书。

从今天的观点，亚里士多德提出的很多理论，都是存在问题的，例如他认为，力是导致物体运动的原因。而牛顿发现，力不是导致物体运动的原因，而是改变物体运动的状态。

这样我们很容易觉得，亚里士多德也没啥了不起呀。

现实是，亚里士多德的很多思想，即使到今天，还是很深刻。而且更重要的，建构起一个相对严谨的理论体系，并不是容易的事情。然而亚里士多德，他建构的理论体系，远远不止一个。而且很多还是自己第一次在研究， 缺乏参考资料，没有 Google。

你自己尝试建立起一个理论体系，至少做到自圆其说，还能解释很多现象，试试看就知道了。

当然，对亚里士多德来说，他应该并不是认为自己是建立很多理论体系，而是在建立一套整体的关于科学的理论体系（那时候没有科学这个词，是哲学）。

在《古今数学思想》中说：

> 他认为科学可分三类：理论性的、生产性的和实务性的。理论性科学是探求真理的，包括数学、物理学（光学和声学以及天文学）以及形而上学，其中数学是最精确的科学；生产性科学是各项工艺；而实务性科学，例如伦理学和政治学，则是为了摆正人的行为动作。
>
> 在理论科学中，逻辑是其中各门科学的先行学科，而形而上学家则要讨论并解释数学家和自然哲学家（科学家）认为不言而喻的东西，例如研究对象的存在性或真实性问题以及公理的本性问题。

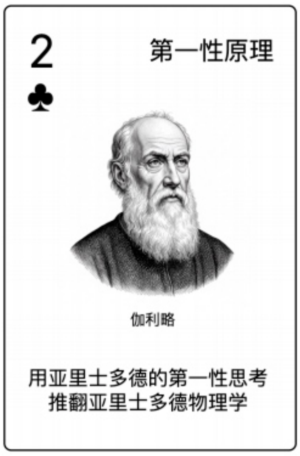
我们可以看到亚里士多德，其实他的不光是逻辑思维厉害，而且整体思维超级强、目标非常宏大。

但让他做「逻辑思维」的代表人那是独一无二，因为他写出了最早关于逻辑学的著述，逻辑学的开创者。

在亚里士多德 50 来岁的时候，他回到雅典，建立了吕克昂学园。他一边讲课，一边撰写了多部著作。他的作品很多都以讲课笔记为基础，有些甚至是学生的课堂笔记。所以有观点认为，亚里士多德是西方第一个教科书的作者。

溯本思考（第一性思考）

在思维方式上，亚里士多德提出了一个概念：第一性思考（First Principle Thinking）。



亚里士多德说：

> 在任何一个系统中，存在第一性原理，是最基本的命题或假设，不能被省略，也不能被违反。

这个概念，十多年前因为 Elon Musk（特斯拉、SpaceX 创始人）的推崇，又被翻了出来。

在一次对 Elon Musk 的访谈中，Musk 谈到了他思考重大问题的方式，也就是亚里士多德提出的 First Principles Thinking。

因为在 Musk 的访谈中，把这个跟 Analogy 对应，为了对比我就把它翻译为溯本法啦，与之对应的是 Analogy(类推法)。

所谓溯本法，简单的说，就是从追溯到事物最基本的原理/法则，然后以之为出发点进行推导的思维方式。而所谓类推法，就是其他人或者其他事物是如何如何，所以我也要如何如何。

这个世界上的大多数人，可以说只会用类推法思考。股市上涨，隔壁老王都赚钱了，我一定也要进去啊。然后这拨人往往就是被收割的韭菜。万众创业 O2O 红火，于是我也要做风口上的猪，大势一变就重重跌到地上。

在数学学习上，就是别人刷题你也跟着刷题，学校每周考试看成绩你就跟着觉得成绩非常重要。

反过来，如果是溯本法，那就可能是要思考，到底什么是股票，股票的价值如何评估，从这个角度建立自己的逻辑体系。例如巴菲特，就是这种思路。

一个领域的复杂性越高，因果关系越不明显，能够把握本质的往往越少。类推多数人的做法，通常你也就只能得到平均的结果，而按照定义这就是「平庸」(泯然众人)。股市上的平庸通常就是做接盘侠，学业上的平庸就是做刷题机器。

前面我们谈到，亚里士多德把科学分为三类：理论性的、生产性的、实务性的。其实这也是第一性思考的例子。他先从科学这个基本概念入手，进行分类，然后展开研究。最终建立了跨越多个领域的各种理论体系。

归纳与演绎

亚里士多德在历史上，首创了形式逻辑的理论。形式逻辑指的是传统逻辑，狭义指演绎逻辑，广义还包括归纳逻辑。

所谓归纳，是从特殊到普遍；而演绎，是从普遍到特殊。

比如「因为 A 同学在刷题，B 同学在刷题，所以学生都应该刷题」，这是归纳，从个别到普遍。

「学生都应该刷题，你是学生，所以你应该刷题」，这是演绎。

在演绎逻辑方面，亚里士多德提出了「三段论」。

所谓三段论，是由一个共同概念联系着的两个前提推出结论的演化演绎推理，由大前提、小前提和结论三部分组成。

- 大前提：已知的一般原理或一般性假设
- 小前提：关于所研究的特殊场合或个别事实的判断，小前提应与大前提有关
- 结论：从大前提推出的，对于特殊场合或个别事实作出的新判断

三段论的基本结构为：规则(若 A 则 B) →案例 (A) →结果 (B)。

例如「学生都应该刷题，你是学生，所以你应该刷题」，就是个典型的三段论。

- 大前提：学生都应该刷题
- 小前提：你是学生
- 结论：所以你应该刷题

再举个例子：

- 大前提：提高售价会导致销售减少
- 小前提：我们已经提高了售价
- 结论：销售将会减少

从逻辑推理的角度，归纳法有一个问题。就是从特殊到普遍，推理出的结论很难说是严谨的，因为有遗漏可能。

比如看见两个同学刷题，是不是所有同学都应该刷题呢，哪怕看到一百个、一千个同学，也不能严谨的推导出这个结论。

在这方面，最著名的一个案例，大概就是「黑天鹅」。

在大航海时代之前，欧洲人一致认为，天鹅都是白的。因为见过了那么多天鹅，都是白色的呀。

后来在澳洲，发现了黑天鹅，这个观点就被推翻了。

归纳这种「从个体到普遍得出结论」，逻辑推理上难以严谨。哪怕你看了一万只天鹅都是白的，做出「所有天鹅都是白的」，这个逻辑本身是有问题的，尽管现实当中很多时候可以直接当结论用。

而演绎法则是相反，从普遍到一般。那么，用三段论为例，如果大前提、小前提靠谱，那结论就是靠谱的。

至少从逻辑上，大前提、小前提到结论，这个推理过程是严谨的。至于大前提小前提本身是不是靠谱，那是另外的问题了。

比如「所有天鹅都是白的，它是天鹅，所以它是白的」。

如果大前提「所有天鹅都是白的」、小前提「它是天鹅」成立，那么可以严谨的推出结论「它是白的」成立。

鉴于归纳逻辑自身推理链条的难以严谨，如果我们要得出逻辑形式上无懈可击的推理，那就更多的需要考虑演绎逻辑。

其实我们日常生活中，都会不自觉的应用归纳和演绎逻辑。

比如成功学，往往强烈灌输的一点就是「努力就能成功」，真的被洗脑的人，他们的演绎逻辑往往是：

- 大前提：努力就能成功
- 小前提：我没成功
- 结论：我不够努力

好啦，这批人往往就是继续蛮干。

这个逻辑放到学校教育上，就是诸如：

- 大前提：成绩好就要多做题
- 小前提：你成绩不好
- 结论：你要多做题

老师和家长就经常是这个思路。

从逻辑形式的来说，这些大前提、小前提到结论的推导，都是符合演绎逻辑规律的。问题是，大前提就不靠谱。

这些大前提，是基本的指导人的思考、行动的出发点。如果大前提不靠谱，意味着他们可能各种思维、行为都有问题。

大多数人，根本就没有意识到自己的「大前提」是什么，更不会有意识的去校验。

对逻辑思维活动的阅读与反思能力

这里就涉及到一个非常重要的能力，也就是阅读人的思维活动，理解自己和他人逻辑推导链条的能力。

如果一个人善于反思自己的逻辑推理链条，那么就容易找到逻辑错误的本源，从更深层次去解决问题。

如果一个人善于阅读其他人的逻辑推理链条，那么更容易理解对方的思路，影响他人。

理解自身逻辑链条，和理解他人的，本身就是相辅相成的。

例如对我们的同学，那就需要意识到，你的「成绩不好就要多刷题」这个观念，到底是如何产生出来的。

这里一个基本的思考框架：

- 我的结论是什么？（e.g., 我应该多刷题）
- 我这个结论是基于什么前提推导出来的？（e.g., 大前提：成绩不好就要多刷题；小前提：我成绩不好）
- 我的这个大前提，它本身是一个经过验证的事实，还是一个未经审视的信念/假设？
- 我的小前提，它本身是一个经过验证的事实，还是一个未经审视的信念/假设？
- 我是如何基于大前提和小前提推理的，这些步骤是否严谨可靠符合逻辑？

从本源开始建构演绎逻辑体系

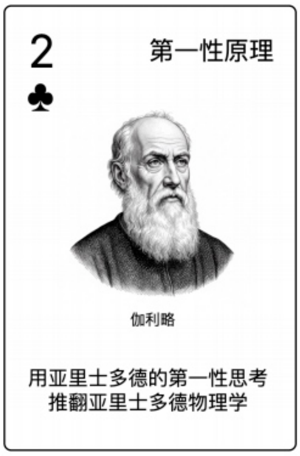
在前面我们看到，如果一个人演绎推理的大前提是错误的，那么接下来可能一啪啦推理、结论都成问题。

所谓一步错，步步错。

因此，在思维层面，尽量的确保我们大前提的有效，非常重要。

那如何做到这一点呢？回归事物本源呗，也就是亚里士多德说的「第一性原理」（溯本）。

> 在任何一个系统中，存在第一性原理，是最基本的命题或假设，不能被省略，也不能被违反。



Elon Musk 研究火箭运输成本，就是一个案例。他回溯到火箭最基本的组成，反过来一步一步推导，到底应该如何降低成本。这样产生了 SpaceX 的商业和科技策略。

亚里士多德认为，需要从这些最基本的命题、假设出发，开始建构起思维体系，他提出了「公理和公设」的概念。

亚里士多德把公理和公设加以区别，认为公理是一切科学所公有的真理，而公设则只是为某一门科学接受的第一性原理。他把逻辑原理（诸如矛盾律、排中律、等量加减等量后结果相等的公理以及其他这类原理）都列为公理。公设无需是不言自明的，但其是否属真应受所推出结果的检验。

这样一来，我们在领域的理论体系，应该从公理和公设出发，一层一层的进行演绎推理，产生新的结论、知识。

大家看到这里，是否想到了初中的平面几何呢？

亚历山大大帝：图书馆的构想

在亚里士多德 20 多岁的时候，希腊马其顿王国在国王腓力二世的带领下，开始崛起。

公元前 341 年，腓力二世邀请亚里士多德，担任他儿子亚历山大的家庭教师。

根据罗马时代的作家普鲁塔克的记载，亚里士多德对这位未来的世界领袖进行了道德、政治以及哲学的教育。

亚里士多德的教育，对亚历山大大帝的思想形成起了重要的作用。正是在亚里士多德的影响下，亚历山大大帝始终对哲学感兴趣，尊重知识，甚至以帝王之便提供丰厚的人力、财力资源，使亚里士多德得以完成诸多科学研究。

写到这里，不知道各位有没有感觉，精英教育这东西，真的是非常看起点的。你站在谁的肩上，无比的重要。

中国古人说「下棋找高手，弄斧到班门」，也是给自己更高的起点。

而且高水平精英教育那种起点，实质上还不是一个人，而是一系列的传承。泰勒斯开创哲学研究；毕达哥拉斯学派发扬光大数的研究和几何证明；苏格拉底讲爱智精神，用思想助产术激发思考；柏拉图创建学园，设定自由四艺的科目；亚里士多德研究、建构各

领域的知识体系。每一代人站在前人的肩上，又有自己的建树。他们的背景，是当时希腊灿烂的文明。

站得高，才能看得远。

腓力二世去世后，亚历山大成为了马其顿国王。后来开始了他著名的东征，最远达到今天的印度一代，建立了横跨亚欧非的大帝国。

亚历山大是一个喜欢读书的人，在东征的时候，还带着一大堆书籍。

他当时有构想，要在战争结束后，建立一个大型的图书馆，从而为将来的学术研究创造条件。

然而，这个构想尚未完成，亚历山大就去世了。

托勒密一世：打造希腊学术中心

亚历山大军中，有一位将领托勒密。

他同时也是亚历山大的好友，属于开裆裤朋友的那种，从小就玩在一起。因此，很可能托勒密，也跟着亚历山大，接受过亚里士多德的教育。

后来他还邀请亚里士多德的学生，物理学家斯特拉托，做他儿子的家庭教师。

亚历山大去世后，他打下的大帝国，分为了三个国家。托勒密掌控了埃及一带，建立了托勒密王朝，他被称为托勒密一世。

亚历山大在征服埃及后，在尼罗河口休整，觉得这边可以建设出一个港口城市，成为地中海的航运贸易中心，作为帝国的首都。然而他没来得及建造一个建筑，就去世了。

于是建造这个城市（也就是亚历山大城）的任务，就落在托勒密身上。而亚历山大城，也就成为了托勒密王朝的首都。

托勒密一世这个人，也是对学术有浓厚的兴趣，他招募了一群文人学者，来到亚历山大城。但他的野心，远远不止个人爱好，他要把亚历山大城，打造为希腊学术的中心。

学术研究，是要花钱的。

亚历山大在世，多次资助亚里士多德，这对亚里士多德的研究和教育工作，帮助很大。但这些都是一次性的。

托勒密一世的创新来了，他在历史上第一次，建立了长期的学术基金，来支持学者研究、教育。

人来了，钱有了，还要干嘛呢？

托勒密一世，决定建造一所学校，让学者有研究、交流和教育的环境，这就是亚历山大博学院。

同时，他还决定要实现亚历山大未成的构想：创建一个大型的图书馆。

亚历山大图书馆

在古代，书籍的出版和传播，是要靠手抄本的，远远不是印刷术时代的边界，更比不上今天互联网时代的效率。

因此，书籍是至关重要的学术研究资源。巧妇难为无米之炊啊。

托勒密一世可以说是不惜代价，决定动用各种国家资源，来搞一个大工程。他们采用各种办法，来收集书籍。

首先，他们重金购买各种书籍。

同时，托勒密王朝颁布了命令，要求每艘在亚历山大港停泊的船只，都要上交携带的书籍，让亚历山大图书馆进行抄写，抄写完毕后再归还。

而且，他们不会依赖于船方主动上交，而是会在船舶停靠后，派人上船搜查。

这样，强制进行抄写复制。

当时亚历山大港是地中海的贸易中心，因此船只来往频繁。

而对埃及的友好国家，托勒密王朝动用外交力量，跟他们达成协议，把这些国家的书籍，让亚历山大图书馆抄写复制。

当然，不用说也可以想象的是，作为强权国家，肯定也少不了掠夺。

整体来说，人类历史上，抢钱抢地盘的事情，数不胜数。花费这么多力气，动用各种国家资源，收集书籍资料的事情，貌似少之又少。

这件事情，在托勒密一世逝世后，依然在继续。

最终的结果，是产生了人类历史上，第一个世界性的图书馆。据记载，图书馆全盛时期，藏书 70 万卷，图书目录 120 册。这在古代，是非常非常惊人的数字。

亚历山大城：学术中心

总结一下托勒密一世做的事情，可以说是为学术研究，进行了一系列的赋能：

- 学术资金赋能：创建学术基金，赞助学者
- 学术场所赋能：创建亚历山大博学院
- 学术资料赋能：创建亚历山大图书馆
- 学术群体赋能：招募和吸引了一群高水平的学术研究者

这些事情，是相互影响的。例如有学术资金、有学校、有汇聚各种书籍的图书馆，这些就吸引了高水平的学术人员。反过来，有了高水平的学术人员，学校发展、学术思想、交流质量等，也就有了保障。从而形成良性循环。

这一系列事情，让亚历山大城，成为了希腊学术文化的中心。

我们谈精英教育，精英教育并不等于单纯的上课。环境，是精英教育中至关重要的因素。例如在当时亚历山大城这样的环境，人们更容易产生研究成果、学习进步。

高质量的精英教育，跟学术思想的活跃、学术交流的顺畅，有密切的关系。往往是在人类文明荟萃的地方，才容易产生顶尖水平的精英教育环境。

当时的亚历山大城，吸引和发展了一群学术精英。

在亚历山大博学园，阿基米德发明了一种「阿基米德螺旋泵」，能够把水从低处送往高处，至今有的地方还使用这种抽水泵；欧几里得创造了几何学体系；海普西克利斯首次将黄道带划分成了 360 度；埃拉托色尼计算出了地球的直径。

需要说明的是，亚历山大城学术地位中心的建成，并非一朝一夕之力。在托勒密一世之后的托勒密二世、托勒密三世，也都重视学术，懂得毕达哥拉斯、柏拉图、亚里士多德这样的学术家，以及他们的学派的重要性，因此持续的在打造学术中心的事情上投入。

欧几里得的演绎逻辑几何体系

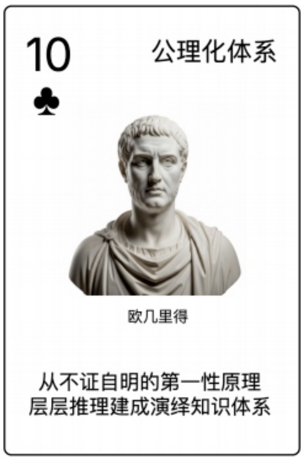
在亚历山大博学园，孵化出了一个对人类科技、教育有重大影响的学术成果，也就是欧几里得的演绎逻辑几何体系。

欧几里得的演绎逻辑几何体系，见于他的著作《原本》。他本人的手稿并没有流传下来，因此他的著作是参考其他人的修订本、评注本、笔记等，重新整理出来的。

《原本》包含十三篇，包括了几何、算术等内容。在明朝末年，徐光启和传教士利玛窦合作，翻译了《原本》前面六卷的内容，因为都是关于几何的，所以译文名称为《几何原本》。

欧几里得《原本》里很多内容，并非他的原创，而是汇集了古希腊数学的成果。例如其中的几何证明思路，很多来自于前人。

然而，他创新性的，建立了一个基于演绎逻辑的几何推理体系。也就是今天中学数学平面几何部分的来源。



在「原本」一书中，一开始欧几里得就劈头盖脸的提出了 23 个定义、5 条公理、5 条公设。

这 5 条公设是：

- 公设 1：任意一点到另外任意一点可以画直线
- 公设 2：一条有限线段可以继续延长
- 公设 3：以任意点为心及任意的距离可以画圆
- 公设 4：凡直角都彼此相等

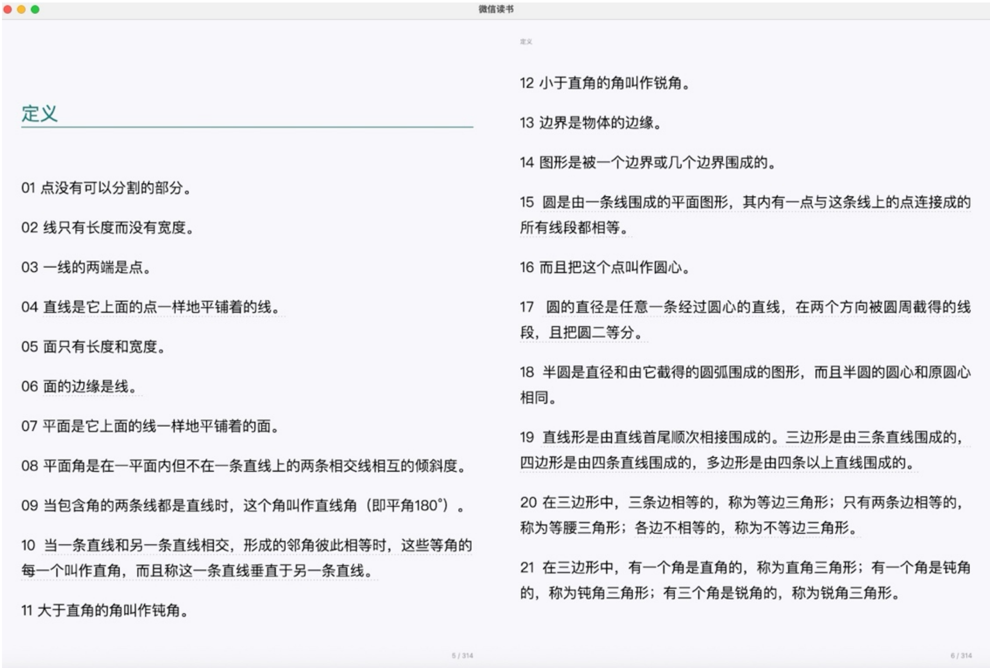
- 公设 5：同平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角和小于二直角的和，则这二直线经无限延长后在这一侧相交。

5 条公理是：

- 公理 1：等于同量的量彼此相等
- 公理 2：等量加等量，其和仍相等
- 公理 3：等量减等量，其差仍相等
- 公理 4：彼此能够重合的物体是全等的
- 公理 5：整体大于部分

23 个定义我们不一一列举，举前面几个：

- 点：点不可以再分割成部分
- 线：线是无宽度的长度
- 线的两端是点
- 直线：直线是点沿着一定方向及其相反方向无限平铺


微信读书

定义

01 点没有可以分割的部分。

02 线只有长度而没有宽度。

03 一线的两端是点。

04 直线是它上面的点一样地平铺着的线。

05 面只有长度和宽度。

06 面的边缘是线。

07 平面是它上面的线一样地平铺着的面。

08 平面角是在一平面内但不在一条直线上的两条相交线相互的倾斜度。

09 当包含角的两条线都是直线时，这个角叫作直线角（即平角180°）。

10 当一条直线和另一条直线相交，形成的邻角彼此相等时，这些等角的每一个叫作直角，而且称这一条直线垂直于另一条直线。

11 大于直角的角叫作钝角。

5 / 314

定义

12 小于直角的角叫作锐角。

13 边界是物体的边缘。

14 图形是被一个边界或几个边界围成的。

15 圆是由一条线围成的平面图形，其内有一点与这条线上的点连接成的所有线段都相等。

16 而且把这个点叫作圆心。

17 圆的直径是任意一条经过圆心的直线，在两个方向被圆周截得的线段，且把圆二等分。

18 半圆是直径和由它截得的圆弧围成的图形，而且半圆的圆心和原圆心相同。

19 直线形是由直线首尾顺次相接围成的。三边形是由三条直线围成的，四边形是由四条直线围成的，多边形是由四条以上直线围成的。

20 在三边形中，三条边相等的，称为等边三角形；只有两条边相等的，称为等腰三角形；各边不相等的，称为不等边三角形。

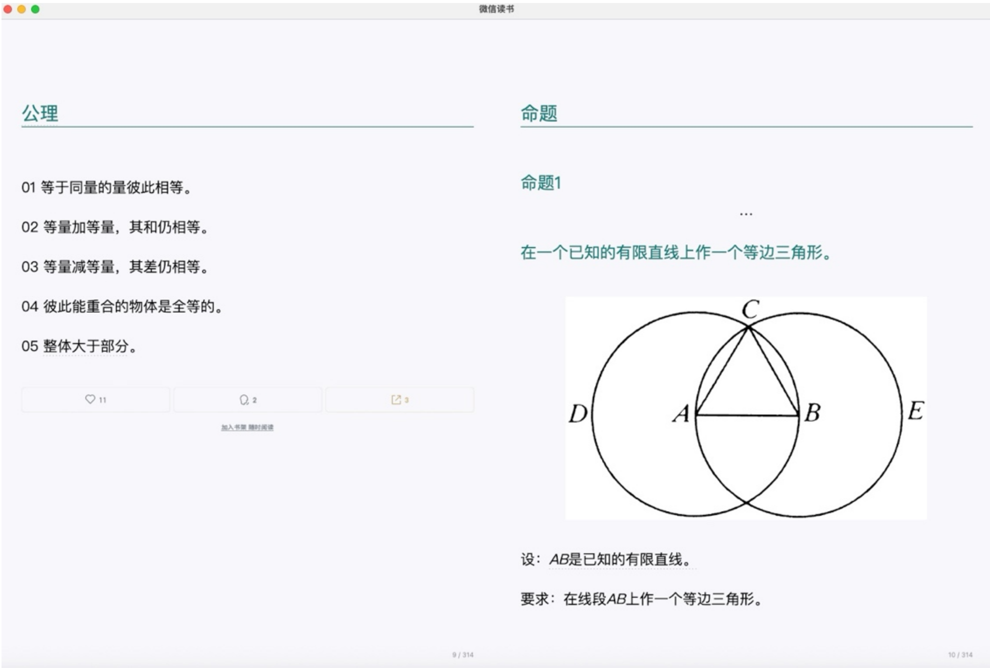
21 在三边形中，有一个角是直角的，称为直角三角形；有一个角是钝角的，称为钝角三角形；有三个角是锐角的，称为锐角三角形。

6 / 314

我们可以看到，他所说的「公设」，是在平面几何领域的几个本源规则；而「公理」，则是数学领域的本源规则。

而定义，则是对平面几何中一些基本概念的明确。

接下来，在「原本」前面六章，欧几里得基于这些公理、公设和基本概念，使用演绎推理，推导出一系列的证明、产生了各种定理，衍生出一个庞大的几何知识体系。



爱因斯坦说：

> 我们推崇古代希腊是西方科学的摇篮。在那里，世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个逻辑体系如此精密地一步一步推进，以致它的每一个命题都是绝对不容置疑的——我这里说的是欧几里得几何。

他还说：

> 西方科学的发展是以两个伟大的成就为基础，那就是：希腊哲学家发明形式逻辑体系(在欧几里得几何学中)以及通过系统的实验发现有可能找出因果关系(在文艺复兴时期)。

欧几里得几何与理科精英教育

欧几里得的几何学，从具体的内容角度，继承了希腊时代的数学。而从逻辑学的角度，则是基于亚里士多德逻辑论（三段论、第一性原理、公理与公社等）。

而他的这套演绎逻辑体系，具体的演示了如何基于第一性原理，加上演绎逻辑，层层推进，建构出系统的知识体系。

亚里士多德讨论的逻辑学，对于精英教育、发展智慧，非常的重要。一直到今天，大多数领导者，基本的逻辑能力都欠缺。

然而逻辑训练，尤其是体系化的建构逻辑知识体系的能力，是很难的。

这种能力，需要系统化的训练。

而欧几里得几何，给这样的逻辑思维训练，提供了一个绝佳的场景。它基于简单的几何图形，相对直观。而且，学习成本低。你只需要有纸笔，没什么昂贵的实验室环境，从教学的角度简单易操作。

因此，《原本》一书，在古代西方世界，成为了重要的教材，发行量仅仅次于《圣经》。一直到今天，我们的初中教材平面几何部分，依然是基于欧几里得几何的改进版。

但遗憾的是，我们的教育，没能真正领会几何甚至数学锻炼逻辑训练建构知识体系的精神。今天的数学教材，甚至连欧几里得几何最基本的，那种从第一性原理出发建构「演绎逻辑体系」，都看不到了。欧式几何的内容，被淹没在一堆其他内容里，切割开，学生看到的是一个一个的片段，却看不到欧式几何那种「演绎逻辑的知识体系大厦」。

对应到我们今天的同学，普遍缺乏基本逻辑能力，例如溯本思维，对逻辑链条的阅读和反思能力，更谈不上体系化的建构知识体系能力。基本逻辑智慧的欠缺，导致了各种各样的问题。

很多同学初中觉得平面几何头疼，原因就是你的思路没转过来。

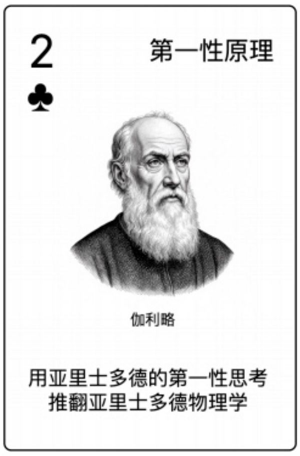
总觉得能解几道题就行，这是致命的错误。

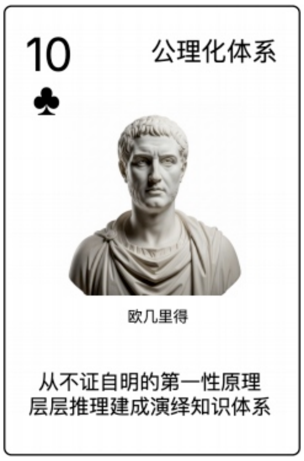
你要做的，是从第一性原理，去研究探索、层层推理，形成自己的演绎知识体系。

顺着这个思路，很多难题就迎刃而解了。

当然具体一些题目还是有难度要思考，但是整体掌握会很顺畅。

要手握「第一性思考」和「公理化体系」两张核心牌，去研究平面几何，以及整个数理学科，建立你的智慧大厦。





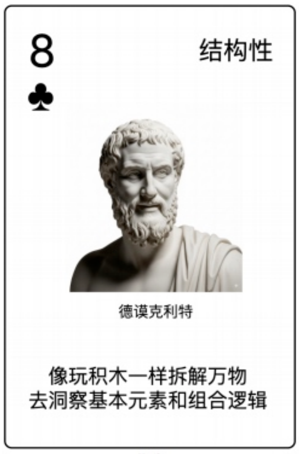
结构性思维：拆建和形成整体

第一性原理，是逻辑思维的体现。

而基于第一性原理，层层推理形成公理化知识体系，这已经进入了「整体思维」范畴了。

那么如何有效的把握研究整体呢？

这里一个重要的思维就是「结构性思维」，梅花 8。



结构性思维的代表人物，是德谟克利特。这位古希腊哲学家的思想极其超前，被后世誉为「原子论之父」。

当时，大多数哲学家都在思考「世界的本原是什么？」有的说是水，有的说是火。但德谟克利特提出了一个石破天惊的观点：

> 世界，是由两种最基本的东西构成的——「原子」与「虚空」。

原子：在希腊语中意为「不可再分的」。德谟克利特想象，万物，无论是一块石头、一棵树，还是一滴水，如果把它无限地分割下去，最终一定会达到一个最小的、坚实的、不可再分的「基本元素」。这些「原子」在性质上没有区别，但它们的形状、排列方式和位置各不相同。

虚空：这是一个同样伟大的概念。他认为，必须有一个无限的、空无一物的「舞台」（虚空），才能让这些「原子」在其中自由地运动、碰撞和组合。

有了这两样东西，整个宇宙的森罗万象，就可以被解释了：

世间万物的不同，并非本质不同，而仅仅是原子「组合结构」的不同。一块铁之所以坚硬，是因为构成它的原子「钩」在一起，排列紧密；而一滴水之所以能流动，是因为构成它的原子是光滑的、圆形的，可以自由滚动。

一切的生灭变化，都只是原子的「聚散离合」。一个物体的诞生，是原子的组合；它的毁灭，则是原子的分离。原子本身，是永恒不灭的。

德谟克利特的思想，就是经典的「结构性思维」。他将纷繁复杂的世界，拆解到了最底层的基本单元（原子），然后用一套极其简单的组合规则，去重新搭建整个宇宙。

对于结构性思维而言，想要理解一个复杂的整体，最根本的方法就是：

- 拆解它，找到构成它的最基本单元
- 分析这些基本单元之间的组合逻辑与结构关系

结构性思维，其中包括了「基本元素与组合元素」的模型思想，是从整体理解事物的一个重要模型。

在小学学过「素数与合数」，这两者英文是「Prime Number」和「Composite Number」。

Prime 是基本元素，Composite 是组合元素。

命名就直接反应了结构思维。

所以「素数与合数」，其实是从乘法这个维度，把整数分为基本元素和组合元素两个类别。

基本元素不可以再分解为数的乘积，而组合元素则是一系列基本元素进行乘法运算产生的结果。

这样，其实就建立一套简化的、理解整数世界的体系。

你用「结构性思维」去理解，知识掌握是很容易的。

关于结构性思维，一个形象的比方，是拆积木和搭积木。

以研究知识体系为例。

每个学科，都有自己的知识体系。而且越是理科，知识体系的内在逻辑性强关联度高，环环相扣。

这样，学科自身就像是一个成型的积木大厦模型。

我们需要首先去拆解这个模型，分析它到底是怎么造出来的，有哪些基本元素，是如何一步一步组合更高的楼层的。

那么，拆解清楚了，我们再自己按照这个逻辑，把积木给搭起来。

如果别人怎么搭的都没搞清楚，自己搭建就有麻烦。

在现实中，因为模型巨大复杂，这个工作，是交互进行的。

我们拆解一部分，自己搭一部分，然后继续拆解、搭建。

例如听课，一方面是理解老师、教材的内容，一方面就是自己建立起内化的知识体系。

学习顶尖的人，他们拆的很透，搭的很牢。对于各个积木了如指掌，因此哪怕遇到新的模型（题目），也很快可以搭建或者拆解出来。

从这个角度，从积木游戏的角度，学习就像是：

- 拆积木（理解学科知识体系）

- 搭积木（创建学科知识体系）
- 稳积木（巩固学科知识体系）

你看到一个知识，例如「二次求根公式」，需要意识到它不仅仅是一个单独的积木，它下面还有一堆的楼层，各种积木才能把「二次求根公式」搭建起来。

例如：「一次方程的解法」、「完全平方式」，这些是搭建的材料….还要知道搭建的过程（如何推导出来的）。

你这样一直拆，就会拆到最基本的元素，那么和第一性原理、朴素原子论就对上了。

如果你有结构性思维，你根本不会去死记硬背。

如果你喜欢死记硬背，意味着你欠缺结构性思维，那么需要做的不是多背几遍，而是把正确的思维建立起来。

统一性思维：万物背后的共鸣

除了结构性思维，统一性思维也是一种重要的整体思维观念。

老子说：「道生一、一生二、二生三、三生万物」，其视角就是统一性视角。

科学的历史，很大程度是「寻找统一性」的历史，例如物理学角度：

1）牛顿的大统一

他用同一个万有引力定律，统一了天上的行星运动（开普勒定律）和地上的苹果下落。证明了宇宙遵循着普适的、统一的规律。

2）麦克斯韦的大统一

他用一组优美的方程，统一了电、磁、光这三种看似毫不相干的现象，揭示了它们都是「电磁波」这个更深层次存在的不同表现。

3）爱因斯坦的大统一梦想

爱因斯坦的后半生，都在致力于寻找一个能够统一四种基本力（引力、电磁力、强核力、弱核力）的「大统一理论」。这个梦想至今仍是理论物理学家们追求的「圣杯」。

在「统一性」方面，杨振宁也有重要的贡献。

他和李政道一起提出了弱相互作用中的宇称不守恒，并在此基础上，与米尔斯发展了杨-米尔斯理论（非阿贝尔规范场论）。

这个理论极其重要，因为它成为了后来统一电磁力与弱核力（电弱统一理论）的数学基础。

杨振宁有一个演讲，讲他的求学经历，应该在他 90 岁左右的分享，整体依然是思路清晰，头脑睿智。

讲座种谈到他去了芝加哥大学的物理学，当时这是全世界数一数二的物理系，

而为什么他要去芝加哥大学呢？

主要是他想要找跟费米写一篇实验方面的论文。

我们知道费米是二十世纪少数的「理论物理与实验物理」兼修的物理学家。

杨振宁理论强，实验弱，所以他想帮自己补短板。

这也是在选择什么样的环境，和怎样的头脑学习。

今天很多同学努力，但是你在向什么样的头脑学习呢？学习的到底是顶尖的思想，还是落后的糟粕？

就从「统一性」这个角度，顶尖思维是寻找不同事物的统一性。

那么应试学习在干嘛？把一个本来就没多少技术含量的考试，拆成各种题型，恨不得茴香豆 4 种茴字拆出四九三十六种题型，让大家每天都要刷熟悉。

如果你有些基本见识，就会发现应试学习的思路，跟顶尖头脑完全是相反的。

那么到底你应该跟谁呢？

杨振宁选择了去芝加哥跟着费米学，你到底在跟什么样的水平学？

这种战略性的失败，不是战术勤奋就能弥补的。

我们看数学，从小学到中学，其实也一直在被「统一性」驱动。

例如数，从整数到分数，我们尝试建立统一的四则运算法则。

然后发现很多事物有正反性，我们还是把它们统一到数的概念里面，产生了正负数。基于正数的运算法则进行推导，进一步去统一了计算规则。

在高中，坐标轴之后，对于数对，我们发现不仅仅是「正负」两个方向，我们又产生了向量，继续用「数」和「四则运算」的基础知识和逻辑来统一。

统一产生简化。

而应试学习反过来，每个都自己去尝试记结论、刷题，总觉得分得足够细才能形成条件反射。

时间都花在干「分裂」的事情上了。

所以完蛋了。

打个比方，顶尖头脑关注持续合并同类项，这样算式越来越简单；应试教育关注持续拆分同类项，这样算式越来越复杂。

力量强，源于统一，而不是分裂。

总结：哲思智慧与哲思能力

总结一下我们的梅花（哲思智慧），黑桃牌可以分为 3 个层次：

1）第一层：最高统帅

- A: 理性的 3 大思维

2）第二层：三大军团

- K: 整体思维
- Q: 辩证思维
- J: 逻辑思维

3）第三层：基础武器库

对应整体思维：

- 10: 公理化体系
- 9: 统一性
- 8: 结构性

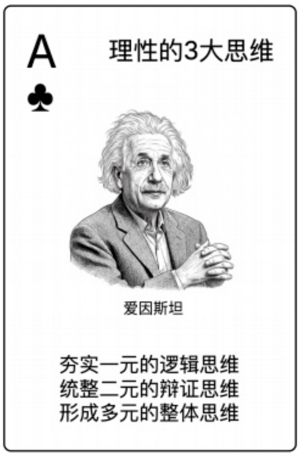
对应辩证思维：

- 7: 正向与逆向
- 6: 有限与无限
- 5: 无知与求知

对应逻辑思维：

- 4: 证实与证伪
- 3: 归纳与演绎
- 2: 第一性原理

最核心的，始终是 A 牌所统领的三大思维。



这些哲思牌本身，就是人类古今顶尖智慧的结晶，也是所有数理学科最底层的思想基石。

你的思维与这些深刻的智慧越能产生共鸣，就越能感受到数学与科学的美妙，也就能越轻松、越高效地抵达知识的彼岸。

第六章：贯通（科学训练）

回顾：理科思维扑克

好了，我们已经详细讨论了各类扑克牌，让我们回顾一下，我们扑克的结构：

1）两张王牌、两条宪法

- 大王🌟 (爱智求真)
- 小王🪄 (化繁为简)

2）四种智慧、四大能力

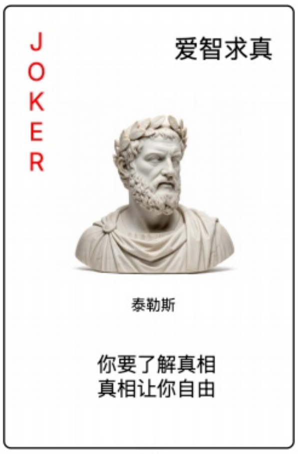
- 红桃♥️ (表达智慧): 表达能力
- 方块♦️ (观察智慧): 观察能力
- 黑桃♠️ (谋略智慧): 谋略能力
- 梅花♣️ (哲思智慧): 哲思能力

这 54 张牌，构成了顶尖学神的「核武库」。它囊括了从「看清问题」到「洞察本质」的核心思维体系。

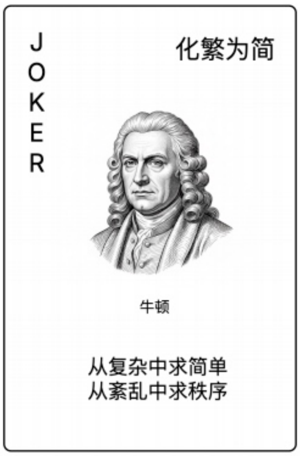
回顾：6 张核心牌

在扑克中，最重要的核心牌是双王四 A，它们统领了理科思维：

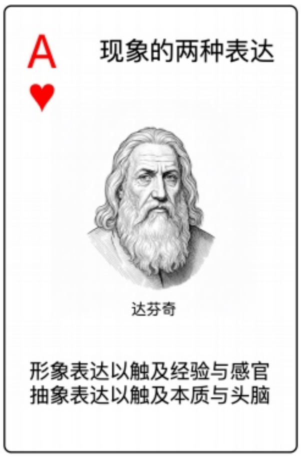
1）大王：爱智求真



2）小王：化繁为简



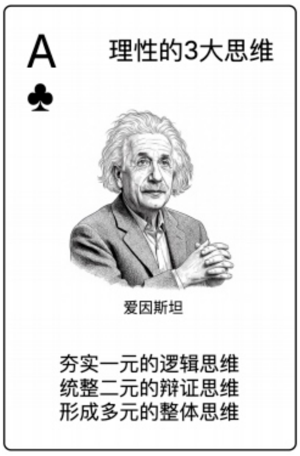
3）红桃 A：现象的两种表达



4）方块 A：线索的 4 种类型

5）黑桃 A：简化的 5 大策略

6）梅花 A：理性的 3 大思维



这 6 张牌统领的思维扑克，贯穿了从小学到高中的核心思维体系。

以前大家知道「思维很重要」，但到底需要怎样的思维能力呢？

很模糊。

但读到这里，大家应该已经很清晰了。

接下来的问题就是，如何把这些书面上的牌，内化到你的头脑中，随时可以打出连击，持续强化。

这就需要科学训练。

科学训练：目标的科学性

科学训练的第一个科学，就是训练目标的科学性。

基于第一性原理，让我们思考，到底要训练的能力是什么呢？

有两种类型的能力：技能与智能。

- 技能：熟练度驱动
- 智能：洞察力驱动

搬砖是一种典型的技能。技能的提升通常比较简单，随着时间的推移熟练度上去，你的效果也就会上去。所以对于技能提升，努力常常容易看到直接的、明显的效果。

而智能这个东西，努力和能力提升的关系，就不是那么简单了。因为所谓的智能，它的基础是对规律的把握、问题的分析判断、策略的制定、高质量的决策。一个人是否有高度的洞察力，看透事物的本质，能做出高质量的判断和决策，决定了它的智能水平。

例如人际关系能力，我们需要知道面对什么人，他是什么状态，现在他想要什么，讲什么做什么会激发对方的兴趣，能让人舒服。这些背后需要对人性的了解、对心理的阅读、对需求的把握、沟通的策略等等。不是每天都跟人打交道，就能自然的更上一层楼。所以很多人跟人打交道一辈子，水平还是非常低。

需要说明的是，智能是基于技能之上的。例如要有出色的人际关系，至少你讲话发音要能让人听懂把。讲话发音是技能驱动的，通常熟练度上去就 OK 了。

但是无论如何，你到底训练什么核心能力，是要明确的。

数学这门学科，无论是从古代的起源，还是现代学科的设计、教育部门的教育大纲，都很清晰的指向「智慧发展」。

我们会给学生发「三好学生」奖状。

所谓三好，就是「德智体」。

在中小学的学科中，数学在智育方面承担着至关重要的作用。

我们看数学学科，有一个明显的特征，就是年级越高，其概念抽象程度和密集程度往往越高，也就需要更高的智力水平才能应对。

整体来说，数学学习和智力发展，本身就是相辅相成的。通过数学学习提高智力水平，而更高的智力水平反过来让数学学习更容易，进一步发展智力，这样形成良性循环。

越学越聪明，越聪明学习效果越好，效果好也就包括了更聪明。

在顶尖学神的身上，就容易看出这种良性循环。

反过来，大多数同学，他们在数学学习上的吃力，跟智慧水平跟不上有很大关系。

这当中最明显的是高中阶段，鉴于高中的概念知识密度和关系，相比初中明显上了更高档次。很多同学看到教材里各种概念就直接晕了，甚至头疼。

智力跟不上了。

为什么智力跟不上呢？

以前的数学学习都是死记硬背导向的，其「发展智力」的初衷没有实现。

因为智力不足，学习消化困难，进一步的难以发展智力，死循环了。

换个说法，数学这个学科，从教材安排的角度，默认就是学生智力水平会逐年有比较大的升级的。

没有层次性的智力提升，就会更困难。

有些老师会跟同学说：中学小学数学不需要智力，只需要努力。

恰恰相反，数学是非常明确的以智力驱动的学科。没有智力发展的努力大多无效的。哪怕短期成绩掺水，长期还是会跌下来。

上个世纪北京有位特级教师孙维刚，他在生源一般的情况下（40 人中只有 14 人达到区重点最低录取线），交付了优秀的教学成果，最后实验班有 55%的人上了清华北大。

在孙维刚文集中说：

> 近些年来，学校的教学围着升学考试转，一些人教育的目的，就是为了培养能力、考高分。于是应试教育愈演愈烈，猜题押题，高考命题信息，狼烟烽起；题海战术，使学生不堪重负；甚至传授一些旁门左道的解题方法，这些显然完全不是知识了，(连名字都起得五花八门，什么串线法、埋线法)把学生搞得机械麻木。
>
> 这些，我都不赞成。
>
> 知识是需要的，但我们更需要的，是驾驭知识的睿智，是面对陌生的科技难题，敢于直面善于攻克的创新能力，它的本质，是高超的思维水平，是智力素质。所以，教学的目的和实施，应当是，通过知识的教学，不断发展学生的智力素质，造就他们强大的头脑，把不聪明的孩子变聪明起来，让聪明的更加聪明。
>
> 具备完善的智力素质后，首先要牢固掌握和熟练运用学过的知识，更要善于学习和掌握新的知识，不断和更加丰富自己的知识。这样解题考试时拿高分，就不在话下了。因为睿智使得学生在试题面前运筹帷幄、纵横捭阖得心应手，难题自然也就不难了。

孙老师讲「把不聪明的孩子变聪明起来，让聪明的更加聪明」，以发展智力为导向，实现智育。

这是「目标的正确」。

让我们明确，需要以智慧发展为目标。

科学训练：内容的科学性

智慧发展是一个宏大目标，如何落实呢？到底我们要训练什么能力，大家掌握什么思想方法呢？

这就是我们前面的那套扑克牌了。

1）两张王牌、两条宪法

- 大王🌟 (爱智求真)
- 小王🪄 (化繁为简)

2）四种智慧、四大能力

- 红桃❤️ (表达智慧): 表达能力

- 方块♦ (观察智慧): 观察能力
- 黑桃♠ (谋略智慧): 谋略能力
- 梅花♣ (哲思智慧): 哲思能力

这 54 张牌，构成了顶尖学神的「核武库」。它囊括了从「看清问题」到「洞察本质」的核心思维体系，也就是我们需要掌握的内容。

通过掌握这些内容，也就形成了爱智求真化繁为简的理科思维，掌握了 4 种智慧，升级了 4 种能力。

科学训练：方法的科学性

那么到底如何有效发展智慧呢？

我们需要有符合理科本质的学习方法。

理科是建立在发现探索规律之上，研究有从现象到规律的过程。

这个流程可以大致分为 4 个步骤：

现象与问题 -> 迷雾与线索 -> 策略与执行 -> 规律与反思

通常我们会看到一些现象，基于这些现象产生疑问，这是探索的开始，有问题有好奇心。

往往看到真相没那么容易，会隐藏在迷雾甚至重重迷雾中，我们需要去发现线索，从而找到破解迷雾的方向。

那么接下来，明确了迷雾、有了线索，我们要针对性的设计策略并执行，从而破解迷雾。

在破解层层迷雾之后，最终我们可以看到真相，找到规律，提炼更深层次的底层逻辑，反思自己的思维过程，提升改进。

这就是「从现象到本质发现的过程」。

它是在侦破真相。

那么今天为什么应试学习缺乏效果？

从方法的角度，违反了这一基本探索发现流程。

老师直接把规律或者答案当作结论给大家，背下来，刷题。

大幅度跳过了前面 3 个步骤，也就跳过了对大家智慧发展训练的核心活动。

从短期看，知识难以理解；题目难以攻克。从长期看，整个智慧水平停滞或者发展缓慢，难以应对更高挑战。

所以只能依靠死记硬背勉强应付考试，而这样一来更没有时间去发展能力。

探案流程板：可视化精细化实现探索流程

解决问题是思维过程，会展开一系列的思维活动。

前面的问题、迷雾、线索、策略等，其实都是在展开思维活动。

这些思维活动其实是很复杂的，往往又看不见摸不着。

越是训练思维的难题，最后写到纸头的过程和答案，往往只是真实的、高效思维过程的一小部分。

就像我们前面谈到的「鸡兔同笼」，如果你从「假设法」开始，写出解题过程，到答案。

看上去步骤严谨，但是你起点是「工具」，能到这一步其实已经没啥难度了。

真正重要的思维活动在前面呢。「为什么你会想到这么解呢」

为了让大家更精细、更直观的执行探索方法论，在理科学神训练体系中，提供了直观的在线工具：探案流程板。

利用探案流程板，你可以在解题中，进行深入的思考，直观的、清晰拆解和审视这些思维活动，走上高手的思考之路。

例如：首先拖动创建迷雾节点，把你遇到的迷雾清晰的定义出来。

然后根据迷雾，对症下药，拖动创建策略节点，写下你针对迷雾的破解策略。

这样，思考过程严谨、循序渐进，就像大侦探一样逻辑清晰、有条不紊。

按照这种方式，解一道题，就真正打通了「现象 -> 问题 -> 迷雾 -> 线索 -> 策略 -> 执行 -> 规律 -> 答案」，实现了深刻的理解。

这样保证每解一道题，就有高质量的、充分的研究思考。

科学训练：评估的科学性

学习了，方法执行了，做的怎么样，要有科学的评估。

今天应试教育的评估，简直就是奇葩之大成。

几个问题：

1）只评估分数，不评估思考过程

真正有效的训练，是有思维强度、提升了思维能力的训练。

而单纯的分数，并不能看出这一点。

死记硬背刷题，短期内可能也能提分，但是同学既没有掌握知识，也没有提升智力，属于浪费时间。

这种现象普遍存在，却并没有有效的评估来提供反馈。

2）没有成本指标，只有分数指标

一个基本的常识是，要有衡量生产力的指标，既要包括产出，也要包括投入。

分数算是一个产出吧。

但是投入指标呢？

对于同学学习而言，最关键的成本指标是学习时间。

每天花 1 个小时得 90 分，和每天花 3 小时得 90 分，是截然不同的生产力。

但应试教育不管成本指标。甚至鼓励/强制同学们刷更多的题。

这本身就是反生产力/反智慧的。

这意味着，应试教育根本不关心同学们的生产力水平。反而是通过挤占同学更多的时间，来获得表面的分数。

3）考试题目的不科学脱节（以考代训）

一个科学的训练体系，对于每次考试的目标，考察内容、强度等，是有严谨规划的。

例如到底是考察基础知识、还是考察速度，好多因素。

但今天学校普遍存在盲目拔高强度，上来就要「向中考高考高难度高强度」看齐，很多同学上手就被卷入高难度高强度试卷，这时候基础知识掌握状况难以分辨，成绩是缺乏意义的。

同时大家也缺乏时间去掌握知识。

哪怕是顶尖球队，也有青训机制，有基础训练，然后逐步提升强化对抗。基础训练注重掌握基本动作，规范稳固，再提升。

应试教育一方面把每个人当天才觉得扔进水里就能游泳，一方面把每个人当蠢才觉得必须什么都要管。

其训练评估既不适合高手，也不适合小白。

4）刷题量太多

科学的训练，强调的核心的训练量，甚至关注在提升质量的基础上降低训练量。

这才是更高的效能。

而应试教育只会一招：多刷题、加量。

加量不是本事，控制数量保障质量才是本事。

5）刷题量多导致的成绩评估不靠谱

什么样成绩，是跟多少训练量挂钩的。

例如，我们体育课测试大家跑 3000 米，这个一次跑出来评测数据，是比较靠谱的。

如果一天让人跑 3 个 3000 米，这个评测结果对于大多数人的提升改进，已经没啥参考意义了。

这听上去很荒谬。

但是应试教育普遍存在猛刷题、看成绩的问题，然而这些成绩很容易造成误导。

所以这样造成了几个严重后果：

1）成绩和改进脱节了

每天刷题、每天考试，成绩出来了。

你会发现没啥指导意义。

反正是继续做试卷。

理论上大家要改进错误，但真正要认识到问题的根源，有效改进很花时间。学校发一趴啦试卷，老的没玩新的来了，在这种压力下，很少有同学有精力、定力和能力去找到根本错误搞定。

所以考试归考试，对改进没啥指导意义。

2）迫使同学们课外加量

这种强大的压力，持续的成绩反馈，迫使很多同学课外参加辅导班、刷试卷。

例如一些学校初一就开始周考、月考。

很多同学周考就要准备了，例如周末刷试卷，为了周考分数好。

先不说周考这事本身就有问题。

周考不就是检测你的水平的吗？

还要为周考再做准备？

为中考、高考做准备也就算了。

连一个小周考都要准备….

占据了大量的时间。

3）让众多家长和同学存在对自身水平的误解

因为短期死记硬背刷题可能成绩还过得去，虽然几乎啥都没学到。

导致很多家长、同学对自身水平存在误解。

觉得还行，一直到后来崩盘，还奇怪「以前还可以」。

其实以前根本不可以，被成绩骗了。

当然，自己去刷题、死记硬背也是作弊。

因为你本来不懂，硬是刷出了分，也是自欺欺人。

还有另外一个反向的问题，就是可能同学们课本知识有些基础了解，但考试出题很难，分数非常难看。

本来没那么差，但显得自己不行，这也造成很大问题。

这种现象在小学更突出。

小学按照教育大纲，掌握度要求没那么高的。但是大量学校都自己加难度，并用这个难度要求同学。

而且很多学校是没有科学教研能力的，难度加得很奇怪、违反基本教育和心理规律。

其实中学也有这个胡乱加难度的问题，但是中学同学们不用看成绩了，基础知识普遍塌方（除了极少数）。

总之，科学评估这件事情，非常重要。

有了科学评估，才能形成「实践 -> 反馈 -> 改进」的有效闭环。

不怕起点低，就怕闭环没形成，甚至有误导。

MBI 评估系统：两级质量评估

在传统的解题评估中，很少有对「研究思考活动」的针对性评估，填空题、选择题等直接看答案，应用题也只是看纸头的最终步骤，而非深入的思考过程、和迁移能力。

这种针对「答案」的评估方式，是造成大家重答案轻思考的一个重要因素。

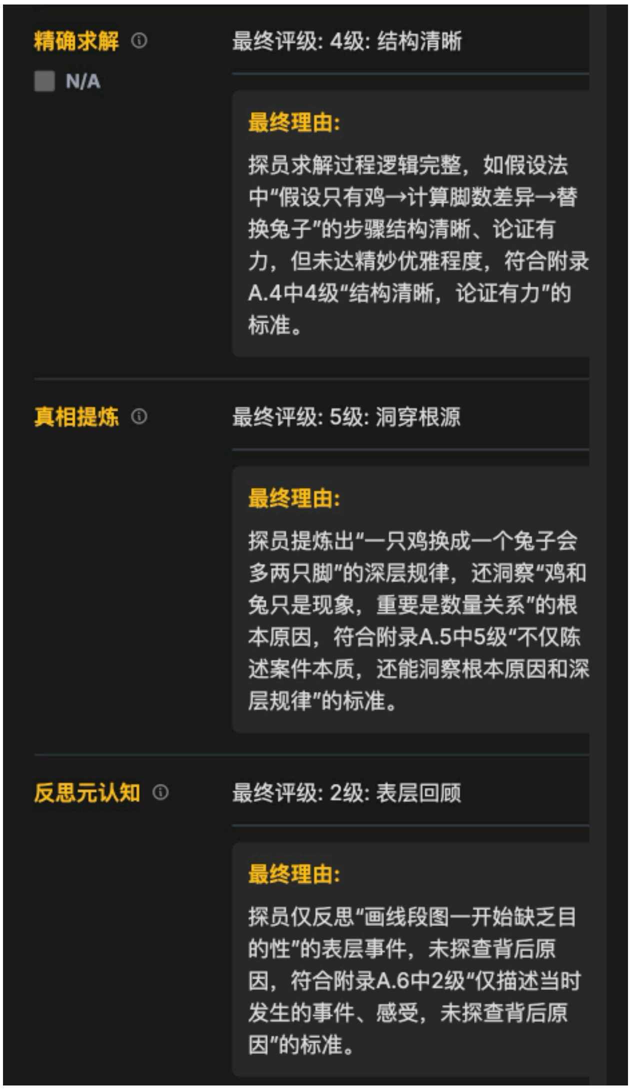
因此在理科学神训练体系中，开发了围绕「思维质量」的探案评估表。

让解题评估真正关注「高效思考、发现真相」。

思维过程质量评估部分，6 个选项：

思维流程质量评估

评估项	等级与理由
明确迷雾	最终评级: 5级: 洞察本质 **最终理由:** 探员创建多个迷雾节点，既定义障碍（如“全是文字比较抽象，不能直观看到关系”“鸡和兔脚数量不一样，复杂难以求解”），又指出根本原因（如“鸡和兔只是现象，对我们可能会形成干扰，重要是数量关系”），符合附录A.1中5级“不仅定义障碍，还指出产生根本原因”的标准。
探索策略	最终评级: 5级: 神来之笔 **最终理由:** 探员提出演化、抽象、转化、创新等策略，其中创新策略（鸡兔配对）与转化策略（算术变几何）具创造性，从根本上简化求解路径，符合附录A.2中5级“提出创造性、非显而易见构想或策略，改变问题性质或简化路径”的标准。
高效规划 N/A	最终评级: 4级: 井然有序 **最终理由:** 探员规划包含假设法、替换法、方程、几何转化、配对策略等多条路径，步骤清晰、逻辑性强，考虑主要步骤但未完全覆盖所有可能性，符合附录A.3中4级“规划非常详细，步骤清晰，逻辑性强”的标准。



为了促进反思，提升认知，在理科学神训练体系中，对于每一个案件，执行了自我评估和 AI 评估的两级评估模式。

在完成一个案件（题目）的调查之后，归档本案之前，首先需要根据评估表进行自评，这样首先完成自我分析反省。

然后申请结案复核，这会启动 AI 进行评审，并计算探案积分。

这样通过两级评审制度，来提升评估质量。确保我们聚焦于「高效思考、理解真相」，而非「一知半解、只管答案」。

科学训练：题目的科学性

训练需要有题目。

题目设计也要有高度的科学性。

要关注质量，控制数量。

能用更少的题目训练出更高的思维水平。

这里有个问题，到底什么是高含金量的题目。

高含金量有两个核心判断标准：

- 题目具备高复杂性
- 题目求解通用规律

1）高复杂性的题目更有含金量

这主要是从锻炼思维的角度来说的。

例如本文案例中，我外甥小学二年级，上奥数班有这道题目：

小明家的鱼塘里养了草鱼、鲤鱼、鲢鱼和黑鱼，已知草鱼和鲤鱼一样多，黑鱼比草鱼少 2 条，鲢鱼比黑鱼多 1 条，鲤鱼有 5 条，问鱼塘里一共有多少条鱼？

我一看就觉得这题目根本不该在二年级引入。太复杂条件要素太多，二年级小朋友难以理解。大多数家长和机构根本没法正确引导讨论。

但反过来说，基于我们的数学思维扑克，这个题目也可以，题目比较复杂，可以让同学研究一起如何简化，训练我们的「形象策略」牌、「线段图牌」。

这样训练思维。

2）求解通用规律的更有含金量

寻求探索通用规律的含金量高，解决具体特殊问题的含金量低。

例如，38+53=？，27+12=？

这些，都是非常具体的计算，解决的是很特殊情况的问题。这样的题目，通用性很低。

也因此价值很低，因为解决一个题目，就是只能适用于一个特殊场景。

你求解出来，也不代表啥大的意义。

问题出来了，各位同学刷了无数题，99%以上都是这种具体得不能再具体的题目。

你很努力，但是努力在非常渺小的题目上了。可能短期内你多了几分几十分，但长期看通常就是过量了太鸡毛蒜皮。

那反过来，十进制的加法法则，这就是一个通用型的规律。上面的那些算式，我们都用十进制加法法则就可以求得了。

这个通用规律/规则就非常有价值，能解决一啪啦问题。

那么进一步的，如何求得整数的通用计算法则，这个题目就非常高价值了。

因为求解了这个问题，就等于找到了通用规律，可以解决各式各样的整数加法计算题目。

所以你真正需要关注的，是这种寻求探索通用规律的题目。

那么这种题目哪里有呢？

课本啊。

例如十进制加法法则这些，其实背后的问题就是「如何求得一个通用、简单可操作可复制的整数加法法则」。

你搞清楚这玩意怎么推导出来的，就是做出了一道求解规律性的题目。

课本的公式、规律、定律、定理，这些都是「通用型规律」，它们怎么出来的，他们的题面是什么（有些时候课本并没有告诉你题面）？研究清楚这个，这个对你的认知提升，一道顶你算 1000 道加减乘除具体运算。

为什么这种题目很重要呢？

理科本来就是探索原理和规律，再基于普遍原理和规律去解决具体问题。

你学理科，核心就是研究原理、规律啊。

1000 道加减乘除有什么难度？耗费你的计算量，有些技巧而已。它更多是单纯的资源消耗，而不能带来你的认知升级。

对原理和规律研究，才能带来你的认知升级和智力升级。

而认知和智力升级之后，很多原来更费力的事会简单。

所谓研究型人才，他们做的往往也是去找到通用的底层的规律规则的事情，进而产生更本质简单复杂问题的方案。

所以也别说你刷了多少题了，就问自己一个问题：

我做过多少研究求解通用规律规则的问题？

可能很多同学学了十二年数学，这个数量等于 0。

从这个角度，最好的题目就是两者兼具：

- 够复杂能够训练思维能力
- 求解的通用规律，非常重要

例如本书中我们的「十进制表示法」、「二次求根公式」的产生逻辑，就是这样的题。

每周 1 题，一年实现智力碾压

选择题目还是一个非常考眼光的事情。

在理科学神训练体系中，我决定选择 100 道经典题，作为一段到五段训练的「规定动作」。

每级 20 道。

在 MBI 系统里访问「经典谜题」，就能看到和当前段位对应的 20 道题。

鸡兔同笼和牛吃草，算是第一级的第一题和第二题。

进一步考虑到，今天同学们繁忙的学习任务。

我觉得一个最基本的计划是：每周 1 题，每道题用 1-4 小时研究思考，1 年 50 题。

正好 100 的一半。

如果你高质量完成 50 题，用一年的时间，已经足以实现对过去自己，和大多数同学的智力碾压。

科学训练：环境的科学性

理科训练的一个重要因素，就是需要有一个「爱智求真、研究探索」的环境。

然而在应试教育中，数理科目培养自由之人的思想被忽视了，死记硬背刷题求分成为了主流。

要做到变革，我们需要打造更好的环境。

所以我成立了数学探案局（MBI）。

数学探案局是一个以学生和家长为主体的真相侦探组织，也欢迎任何想要追求智慧的人加入。

现实世界充满了等待被揭示的真相，而探索它们，正是科学、商业与所有创造性事业的意义。MBI 以数学这一严谨的学科为主要训练场域，旨在站在伟大的思想和现代科技之上：

- 弘扬一种求真的文化；
- 培养面向未来的真相侦探，亦是未来的思想家、企业家、科学家与工程师；
- 让成员真正理解数理学科的真相，成为一流的学习者和研究者；
- 发展启迪理性思考的探案科技。

MBI 的标语：

> 仰望星空，穿越迷雾。

MBI 的理科学神训练营，就是基于本文中介绍的思维扑克和学习科技，培养未来的真相神探。

在外界普遍以分数为唯一标准的「沙漠」中，MBI 希望打造一个「仰望星空，穿越迷雾」的「绿洲」。在这里，「好奇心」比「正确答案」更受鼓励，「深刻的思考」比「快速的解题」更有共鸣。让大家「爱智求真」的灵魂，可以有自由呼吸和成长的空间。

欢迎想要「破解真相、修炼智慧、追求自由」的你加入。

报名信息：理科学神训练营介绍

关于作者

徐强，前微软工程师，数学探案局（MBI）创始人，知乎 30 万关注者。

致力于实现高度启迪人的教育，创建理科训练营推动实现思维能力升级。

微信公众号：数学探案局

知乎：https://www.zhihu.com/people/johnxu